Université de Montréal

# Conception et mise à l'essai d'une séquence de situations engageant un travail de communication en algèbre en 2e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ?

par
Philippe Labrosse

Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de doctorat en sciences de l'éducation, option didactique en mathématiques

16 octobre 2020

Université de Montréal

Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation

---

Cette thèse intitulée

Conception et mise à l'essai d'une séquence de situations engageant un travail de communication en algèbre en 2e secondaire : des apports pour l'élève comme pour l'enseignant ?

Présentée par

Philippe Labrosse

A été évaluée par un jury composé des personnes suivantes

France Caron, Université de Montréal

Présidente-rapporteure

Sophie René de Cotret, Université de Montréal

Directrice de recherche

Louise Poirier, Université de Montréal

Membre du jury

Mireille Saboya, Université du Québec à Montréal

Examinatrice externe

Serge J. Larivée

Représentant de la doyenne

## RÉSUMÉ EN FRANÇAIS

Nous appuyant sur le fait que la communication est essentielle à l'activité mathématique et qu'elle apparaît pourtant souvent négligée dans l'enseignement secondaire, nous avons cherché à concevoir et à mettre à l'essai une séquence de situations en algèbre pour des élèves de 2e secondaire visant à ce qu'ils développent et déploient une communication mathématique en classe. Nous avons fait l'hypothèse que cette communication pourrait offrir, du même coup, un matériau utile à l'enseignant pour rétroagir. Une séquence de six situations portant sur l'algèbre (principalement la mise en équation et la résolution d'équations) a ainsi été conçue. Une analyse a priori a permis de formuler des hypothèses quant au potentiel des valeurs des variables didactiques identifiées pour solliciter une communication mathématique. Ces situations ont été ensuite préexpérimentées afin de les améliorer et pour développer une grille permettant d'analyser le travail de communication des élèves au sein de l'activité mathématique. Elles ont, par la suite, été expérimentées auprès de deux classes d'une même enseignante. Les résultats montrent que le jeu sur certaines variables, notamment la position attribuée à l'élève et celle de son interlocuteur, apparaissent des leviers intéressants pour permettre à l'élève de déployer une communication riche. La position « d'élève-enseignant », par exemple, joue sur la responsabilité de la validation du résultat assumée par l'élève et, en conséquence, sur le caractère a-didactique de la situation. Les résultats montrent aussi que la mise en œuvre des situations a donné à l'enseignante un accès renouvelé aux raisonnements des élèves lui offrant un matériau qu'il lui a été possible d'exploiter en classe.

**Mots-clés :** situation de communication, algèbre, secondaire, variables didactiques, positions des interlocuteurs

## RÉSUMÉ EN ANGLAIS

Given the fact that communication is essential in the mathematical activity, and since it appears to be often neglected at the secondary school level, we wanted to create and put to the test a sequence of algebra situations for students in the second year of their secondary education in order for them to develop and expand their mathematical communication in class. We made the assumption that such a communication could offer, at the same time, a useful tool for the teacher to retroact. A sequence of six situations, based on algebra (mostly putting into equations and solving equations) was thus created. An a priori analysis made it possible to formulate hypothesises related to the potential of didactical variables values to encourage a mathematical communication. These situations were then pre-experimented as a means to improve them, if deemed necessary, and to create a grid that would serve to analyse the students' communication within the mathematical activity. They were then tested in two classes under the same teacher. Results show that some values of variables, among others the respective positions of student and teacher, appear to be interesting triggers that help the student in getting into a rich communication. The "student-teacher" position, for instance, has an incidence on the responsibility of the validation of the result assumed by the student and, consequently, on the a-didactical character of the situation. Results also show that the implementation of the situations offered the teacher a renewed access to the students reasoning, thus providing her material that she was able to use in her class.

**Keywords :** communication situation, algebra, secondary education, didactical variables, positions of interlocutors

# TABLE DES MATIÈRES

# LISTE DES TABLEAUX

# LISTE DES FIGURES

## LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

| | |
|---|---|
| EE | Élève(s)-enseignant(s) |
| EF | Élève(s)-fictif(s) |
| Groupe R | Groupe régulier, l'un des deux groupes dans l'expérimentation |
| Groupe SÉ | Groupe « sports-études », l'un des deux groupes dans l'expérimentation |
| MELS | Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport |
| OCDE | Organisation de coopération et de développement économiques |
| PISA | Programme for International Student Assessment |
| RR | Registres de représentations |
| TSD | Théorie des situations didactiques |
| TAD | Théorie anthropologique du didactique |
| TNI | Tableau numérique interactif |

*À ta mémoire, toi, la 5e membre de mon « jury »,*

*de là-haut, je sais que tu me regardes avec fierté.*

*Je t'aime maman*

## REMERCIEMENTS


« *De près ou de loin, toi le connu ou l'inconnu,*
*qui m'as tendu la main, tout au long du chemin,*
*pour me rendre jusqu'ici, je te dis merci...* »
*(Claude Léveillé)*

Cette thèse reflète un travail accompli avec l'aide d'un grand nombre de personnes. Mes premiers remerciements vont à ma directrice de thèse, la professeure Sophie René de Cotret. Sophie, merci d'avoir été l'étincelle qui a embrasé ma flamme didactique. En me confrontant aux limites du domaine de validité de certaines de mes connaissances mathématiques au dernier cours de didactique du baccalauréat, je ne crois pas que tu savais que tu signais un contrat de plus de 15 ans avec moi à accompagner la rédaction de cette thèse. Les mots me manquent, Sophie, pour t'exprimer toute ma reconnaissance. Merci pour la qualité exemplaire de ton encadrement. Ta rigueur, ta grande disponibilité, ta patience, ton dévouement, et les nombreuses heures passées à essayer de me faire passer d'une phase d'action, à une phase de formulation, puis à une phase de validation, font de toi une inspiration.

Merci à Nicole Gaboury pour le traitement diligent de mon dossier scolaire et pour ses encouragements incessants. Merci aux responsables des études supérieures au Département de didactique et à la Faculté des sciences de l'éducation d'avoir posé un second regard sur mon dossier et de m'avoir permis de finaliser cette thèse, malgré l'exigence de mes choix professionnels ou les diverses embûches vécues durant mon parcours universitaire. Aux professeures France Caron et Louise Poirier, j'aimerais vous remercier pour vos judicieux conseils et votre écoute à différentes étapes de mon parcours en plus d'avoir accepté d'être sur mon jury. À la professeure Mireille Saboya, merci aussi de prendre le temps de siéger sur mon jury à titre d'examinatrice externe. Au professeur Philippe R. Richard, j'aimerais également vous témoigner ma gratitude pour le temps que vous m'avez consacré à répondre à certaines de mes interrogations.

Merci aux élèves et aux enseignantes qui ont participé à l'expérimentation et sans qui cette recherche n'aurait pu avoir lieu. Merci à la Commission scolaire Marguerite-Bourgeoys d'avoir donné son accord au projet. Merci à Madame Sylvie Beaupré d'avoir accepté ma proposition professionnelle pour finaliser la rédaction de cette thèse. À mes collègues d'*Une école montréalaise pour tous* et de l'école secondaire Monseigneur-Richard, je souhaite vous exprimer ma gratitude pour votre soutien, vos encouragements et vos réflexions qui m'ont fait avancer. Un coup de cœur à Madame Josée Lapierre qui, en plus de m'avoir fait cheminer professionnellement et personnellement, a grandement facilité mes travaux de recherche alors que j'évoluais comme directeur adjoint sous sa responsabilité pendant l'expérimentation.

Un travail d'une telle envergure ne peut se faire sans l'appui de son entourage. Mamie Lorraine et Papou Réjean, merci d'être des grands-parents si dévoués et d'avoir permis l'avancement de cette thèse en étant si présents auprès de vos deux petits-fils.

Merci à mes parents d'avoir marché à mes côtés dans ce projet et de m'avoir donné tant d'amour. Maman, où que tu sois, merci de m'avoir constamment encouragé et d'avoir œuvré pour ma réussite. Papa, merci d'être un grand-papa disponible, toujours prêt à aider, et qui peut être fier de trouver ici le résultat de longues années de sacrifices pour m'aider à avancer dans la vie.

Renaud et Maxence, mes deux amours, nés pendant ce projet, merci de m'avoir changé les idées pendant les moments plus difficiles par votre dynamisme et votre amour inconditionnel. Votre présence discrète a été d'un grand réconfort à chaque moment. Sans me les reprocher, vous avez subi mes absences. Je vous aime et vous en suis reconnaissant.

Enfin, à ma douce Maude, merci de ta patience, de ton écoute, de tes encouragements, et de ton amour qui me permettent de me construire comme personne. Ta présence à mes côtés pendant la rédaction et ton soutien indéfectible ont permis d'achever ce projet. Notre couple a grandi en même temps que mon projet de recherche, le premier ayant servi de roc au déploiement du second. Je t'aime x.

# INTRODUCTION

Depuis l'introduction des derniers programmes de formation au début des années 2000, les pratiques pédagogiques ont été régulièrement appelées à changer. Au cœur de ces changements, se trouve l'épineuse question du développement des compétences disciplinaires en mathématiques et des moyens à mettre en place pour que l'enseignant puisse accompagner au mieux l'élève dans ce développement. Dans le programme québécois de formation en mathématiques, ces compétences sont au nombre de trois: *résoudre une situation-problème*, *déployer un raisonnement mathématique* et *communiquer à l'aide du langage mathématique*.

La présente recherche fait suite à une réflexion que nous menons, depuis maintenant plus de 15 ans, sur les tenants et aboutissants du développement des compétences en mathématiques au secondaire dans le cadre des derniers programmes de formation québécois. Le quadruple chapeau que nous avons porté, celui d'enseignant de mathématiques au secondaire, de conseiller pédagogique, de directeur d'établissement et de chercheur, a enrichi et constamment fait évoluer notre réflexion. La compétence *communiquer à l'aide du langage mathématique* ou, plus largement, la communication dans les classes de mathématiques, est l'élément principal sur lequel nos intérêts de recherche se sont arrêtés.

En effet, nous avons constaté, dans le cours de notre pratique, que la communication ne semblait pas être exploitée à son plein potentiel au service de l'apprentissage mathématique en classe. Les enseignants que nous accompagnions se questionnaient sur les situations proposées pour développer la compétence à communiquer et ils étaient aux prises avec des directives ministérielles manquant de cohérence puisque la communication occupe une place de moindre importance dans l'évaluation que dans les programmes d'enseignement.

Des lacunes au regard de l'exploitation de la communication en classe de mathématiques sont aussi mises en évidence par différentes recherches. Par exemple, Rauscher (2006) constate que souvent la communication écrite n'intervient qu'au terme de l'activité mathématique, négligeant ainsi une partie de l'écriture nécessaire à la construction du raisonnement.

Ces différentes constatations nous ont conduit à vérifier la pertinence, voire la nécessité, de la communication en classe de mathématique. L'examen de la place réservée à la communication dans plusieurs programmes de formation mathématique des élèves, de même que les résultats de recherches montrant les apports importants de celle-ci pour l'apprentissage et l'enseignement, nous ont convaincu de l'intérêt de contribuer, par notre recherche, à documenter des façons de favoriser la mise en œuvre d'un travail de communication en classe.

L'objectif général de notre recherche est de concevoir et mettre à l'essai une séquence de situations engageant un travail de communication en algèbre chez des élèves de 2e secondaire. Plus spécifiquement, nous chercherons non seulement à documenter les bénéfices liés à la mise en œuvre d'une communication pour l'élève, mais aussi à examiner si l'enseignant peut bénéficier du travail de communication déployé par ses élèves pour alimenter sa rétroaction.

Pour ce faire, une expérimentation a été menée dans deux classes de 2e secondaire d'une école de Montréal afin de tester le potentiel de six situations à déclencher un travail de communication mathématique. Ces situations ont tout d'abord été préexpérimentées et une grille d'analyse de la communication déployée au sein de l'activité mathématique a aussi été conçue.

La thèse se divise en quatre chapitres. Le premier chapitre présente la problématique. Nous y décrivons nos préoccupations à propos de la communication des élèves en tant que praticien, de même que des observations issues de recherches. Nous examinerons ainsi quelques difficultés au regard de l'exploitation de la communication en classe de mathématiques, mises en évidence par la recherche. Nous verrons aussi que cette pauvre exploitation constitue un problème étant donné le rôle essentiel de la communication dans l'activité mathématique.

Le chapitre 2 présente les éléments théoriques qui permettront d'appréhender et d'étudier le problème de la difficile exploitation de la communication en classe. Nous amorcerons le chapitre en faisant le point sur les concepts de communication, d'interaction et, plus spécifiquement, sur la communication en mathématiques. Nous décrirons plusieurs apports du travail de communication, tant orale qu'écrite, en classe de mathématiques. Nous serons alors amené à caractériser ce qui contribue à la richesse d'une communication mathématique.

Ensuite, la théorie des situations didactiques (TSD) apparaît pertinente à cette étude puisque, d'une part, elle offre un modèle de l'enseignement des mathématiques qui cherche à recréer l'activité du mathématicien chez les élèves à travers une genèse artificielle des savoirs et que, d'autre part, elle considère que la communication est essentielle au sein de cette genèse. Elle constitue le modèle didactique retenu pour inscrire la communication au sein de l'activité mathématique.

L'ensemble de la méthodologie, à savoir la description du dispositif expérimental, la séquence des six situations soumises aux élèves, leur analyse a priori, les méthodes de cueillette de données ainsi que les modalités de l'expérimentation, est détaillée dans le chapitre 3.

Le chapitre 4 présente l'analyse et l'interprétation des résultats qui découlent de l'expérimentation.

Enfin, la conclusion résume les principaux résultats obtenus et les nouvelles questions qu'ils soulèvent ainsi que des prolongements possibles à la recherche.

# CHAPITRE 1
# PROBLÉMATIQUE

## 1.1 À l'origine du questionnement : des observations issues de notre pratique sur la faible importance accordée à la communication dans l'enseignement

### *1.1.1 Un manque de situations permettant le développement des compétences*

Comme conseiller pédagogique, nous avons été régulièrement interpelé par les enseignants pour valider certaines situations issues des manuels scolaires afin d'assurer leur adéquation avec les attentes ministérielles quant aux composantes des compétences qu'elles doivent mobiliser et aussi évaluer. En effet, les situations sont indispensables au développement des compétences, mais sont absentes des programmes de formation.

Tel que mentionné par Jonnaert et al. (2004) :

> « Une des contraintes majeures d'une logique de compétences est l'indispensable référence aux situations dans lesquelles une compétence opère. Comment en effet définir une compétence et les ressources qu'elle peut mobiliser si la situation est négligée ? Or, les situations sont les grandes absentes des nombreux programmes actuels ».
>
> « […] de nombreux programmes d'études actuels se contentent d'énoncer des listes de compétences pour lesquelles le lecteur ignore à quelles situations elles font référence et donc, tout autant, quelles actions la personne pourrait y réaliser. L'absence de la situation dans ces programmes d'études rend ces derniers impraticables dans la perspective d'une logique de compétences » (p. 670-680).

Les auteurs posent un regard plutôt sévère sur les programmes de formation: les situations sont centrales au développement des compétences, mais elles ont été négligées au point de remettre en question l'essence même de l'approche par compétences véhiculée par ces mêmes programmes. Or, devant ces mêmes constats, nous avons accompagné régulièrement des équipes d'enseignants de mathématiques dans la conception ou l'amélioration de situations visant le développement et l'évaluation des trois compétences disciplinaires. Des initiatives ministérielles ont également été mises sur pied, bien après l'écriture des programmes, afin d'établir une banque de situations. Comme le mentionnent toutefois Jonnaert et al. (2004), il aurait été sans doute souhaitable que ces situations se développent en même temps que l'écriture des programmes.

Bien sûr, des manuels ont été développés, approuvés par le Ministère à partir de plusieurs critères[1], et ensuite édités un peu après la mise en place des programmes. Ces manuels contiennent beaucoup de situations qui, selon notre expérience, ne sont pas toujours exploitées à leur plein potentiel en classe pour

[1] Il est d'ailleurs possible de consulter en ligne la liste des critères d'approbation.

plusieurs raisons : manque de temps; degré de difficulté des situations; degré d'aisance des enseignants avec les stratégies qui pourraient émerger de leur exploitation; etc.

### *1.1.2 Des formulations de problèmes souvent surchargées et polysémiques*

Par ailleurs, nous avons aussi constaté que certaines situations de compétences conçues contiennent beaucoup de vocabulaire pour enrober les savoirs mathématiques[2]. De longs textes viennent contextualiser, parfois artificiellement, les savoirs mathématiques qu'on souhaite voir mobiliser dans une situation. Notre constat est d'autant plus vrai dans ce que le Ministère appelle une « situation-problème[3] » qui est souvent présentée par un texte tenant même sur deux ou trois pages. Caron et René de Cotret faisaient aussi le même constat à propos de la compétence *Résoudre une situation-problème* : « on assiste à un phénomène de surenchère dans l'enrobage de problèmes où la difficulté pour l'élève tient davantage à l'énoncé du problème (souvent très long) qu'à la complexité de la modélisation mathématique et de la résolution proprement dite » (2007, p. 132).

À cet effet, devant une situation-problème de la sorte, des élèves qui ont plus de difficulté en lecture se voient désavantagés par rapport à d'autres. On peut penser ici notamment, mais non exclusivement, aux élèves plurilingues[4].

Aussi, dans le contexte des situations-problèmes chargées en vocabulaire, des élèves sont parfois confrontés à la polysémie de certains termes. Certains termes, qui ont un sens spécifique en mathématiques, renvoient aussi à des mots utilisés dans la vie quotidienne ce qui peut facilement poser problème pour les élèves. À titre d'exemple, l'expression « en moyenne » peut être synonyme, dans la vie courante, du terme « approximativement », alors qu'en mathématiques, elle réfère au quotient de la somme de plusieurs valeurs par leur nombre. La polysémie de mots ou d'expression employés en classe peut ainsi créer des obstacles à la compréhension.

---

[2] Le programme de formation du Ministère (2003) parle de « concepts et processus » mathématiques. Nous préférons utiliser l'expression « savoirs mathématiques » qui englobe les deux entités (concepts et processus) indissociables à notre avis. Selon notre compréhension, le Ministère réfère, en utilisant le terme « concepts », aux « savoirs déclaratifs » tandis que le terme « processus » relèverait davantage des « savoirs procéduraux ». Dans un contexte de situations visant le développement de compétences, nous préférons l'expression « savoirs mathématiques » qui se centre à la fois sur les « processus » et les « concepts », les premiers amenant une nécessaire référence aux deuxièmes.

[3] Il importe de distinguer la situation au sens de la TSD et la situation-problème à laquelle réfère le Ministère. En effet, Brousseau définit une situation comme « l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution » (1986, p. 155). Ainsi, la situation n'est pas seulement le problème mathématique écrit remis à l'élève (ce que Brousseau appelle le milieu matériel), mais aussi le contexte de réalisation dans lequel l'élève est placé (seul ou en équipe), les éléments qui agissent sur les réalisations (les interactions avec l'enseignante et d'autres élèves, les précisions et documents remis en cours de réalisation, etc.). Pour le Ministère, la situation-problème semble se rapprocher davantage d'un problème complexe à résoudre.

[4] Nous utilisons l'expression « élèves plurilingues » moins courante que l'expression « élèves allophones ». Toutefois, nous préférons l'emploi de cette expression, plus positive, et qui met en évidence la force de ces élèves qui maîtrisent souvent plusieurs langues.

Nous avions ainsi pris l'habitude d'accompagner les enseignants, dans le contexte des évaluations officielles, à bien intégrer avec leurs élèves le vocabulaire en jeu dans les situations d'évaluation proposées par des activités préparatoires, par le modelage et les explications, de manière à diminuer les obstacles linguistiques afin de bien centrer les élèves sur l'utilisation des savoirs mathématiques. À ce jour, on peut toujours se questionner à savoir ce qui est mis en place dans la pratique pour soutenir l'appropriation du vocabulaire mathématique dans le contexte des apprentissages faits en classe.

### *1.1.3 Une vision pauvre de la communication*

À titre de conseiller pédagogique, nous avons aussi remarqué, plus spécifiquement, que la compétence à communiquer est souvent réduite, par les enseignants, à l'utilisation correcte, par les élèves, par écrit, de symboles et de formules mathématiques. Sans négliger cette dimension de la communication mathématique, nous croyons que cette dernière est plus riche. Elle devrait notamment soutenir l'argumentation et la prise de position, l'interprétation de données issues de différents registres, la mise en forme des idées, la considération des différents points de vue des autres élèves, notamment via l'ouverture à d'autres stratégies que la sienne, etc.

Ces premiers constats nous ont sensibilisé au fait qu'il faille tout autant aider les enseignants (par l'élaboration ou l'analyse de situations, de même que par l'élargissement de la conception de la communication mathématique), que les élèves (par le décodage du vocabulaire et des registres en jeu dans les situations) et nous avons ainsi développé plus particulièrement un intérêt pour la communication en mathématiques. Pour mieux saisir la suite de nos propos, nous retiendrons pour le moment que la communication se définit comme « le fait de manifester sa pensée ou ses sentiments, par la parole, l'écriture, le geste, la mimique, dans le but de se faire comprendre » (Legendre, 1993, p. 216)[5].

Ainsi, nous avons alors été conduit à nous demander, à partir de notre accompagnement d'enseignants : *comment amener les élèves à mieux développer leur compétence à communiquer à l'aide du langage mathématique ?* Un premier défi s'est alors présenté: convaincre les enseignants de l'importance de la communication dans leurs classes de mathématiques, surtout dans un contexte où cette compétence comptait au bulletin pour 30% du résultat disciplinaire, soit moins que les deux autres compétences disciplinaires qu'ils devaient aussi développer et évaluer. D'ailleurs, la compétence *Déployer un raisonnement mathématique* était plus près de la réalité de l'enseignement des mathématiques connu des enseignants. Pour la compétence *Résoudre une situation-problème*, elle était si éloignée des pratiques d'enseignement de l'époque, que les enseignants y accordaient beaucoup de temps pour mieux la comprendre et l'enseigner. La compétence de communication, quant à elle, paraissait comme une évidence : il était manifeste que « faire des mathématiques » nécessite de communiquer et on se questionnait peu sur

[5] Nous développerons davantage le concept de communication en première partie du cadre théorique.

l'enseignement de la communication. Mais, même lorsque nous arrivions à convaincre les enseignants du bien-fondé d'un enseignement qui vise aussi le développement de cette compétence, d'autres défis en classe se présentaient.

### *1.1.4 Des défis à exploiter la communication en classe*

Les observations de plusieurs classes nous ont permis de constater plusieurs défis quant à l'exploitation de la communication en classe : peu de temps pour interagir avec les élèves ou bien pour comprendre leurs raisonnements; des élèves peu habitués à interagir entre eux et avec leur enseignant; forte présence encore d'un enseignement magistral qui laisse peu d'espace aux élèves; et des interactions orientées par un questionnement fermé.

En effet, les échanges oraux entre les élèves et l'enseignant passent souvent par un questionnement, de l'enseignant vers les élèves, de type fermé qui ne suscite pas nécessairement la réflexion des élèves et ne leur permet pas d'approfondir leur compréhension des savoirs mathématiques. Un questionnement plus ouvert pourrait davantage favoriser l'émergence des différents sens attribués par les élèves aux savoirs en jeu dans la classe et, permettrait à l'enseignant d'amener les élèves à confronter ces différents sens. Or, il n'est pas toujours évident pour un enseignant de préparer de bonnes questions, plus ouvertes, et de laisser place aux échanges en classe. On pose parfois aussi des questions dans un but de contrôle de la classe et pour le maintien de l'attention, en utilisant des questions qui sont souvent orientées vers des réponses courtes ou qui insufflent les réponses. Il n'est pas toujours évident pour l'enseignant de laisser de la place aux élèves en posant les bonnes questions[6].

Dans le feu de l'action, il est souvent difficile pour l'enseignant de saisir toutes les subtilités des raisonnements auxquels il fait face et que les élèves produisent. Pour avancer dans son enseignement, l'enseignant doit parfois couper court aux échanges avec les élèves de peur de manquer de temps pour voir l'ensemble des apprentissages de son programme. Parfois, les échanges sont aussi occasionnés par des élèves plus forts ou plus faibles, lesquels nécessitent plus d'attention de l'enseignant ou devancent certains apprentissages, amenant ainsi l'enseignant à délaisser l'ensemble de son groupe. L'enseignant doit alors faire le choix de cesser ou d'accélérer les échanges, tout aussi pertinents soient-ils, au profit du grand groupe.

Nous observons aussi qu'il n'est pas toujours facile pour un enseignant de suivre la démarche de résolution de l'élève, tant à l'oral qu'à l'écrit. À l'écrit, la difficulté de décoder les traces laissées par l'élève, souvent brouillonnes, ou encore le manque de temps de correction empêchent l'enseignant de tirer parti de la démarche et l'amènent à concentrer son attention sur la réponse donnée. En conséquence, on néglige une

[6] Un document fort intéressant à ce sujet a été produit dans le cadre de la *Série d'apprentissage professionnel* par la Division du rendement des élèves pour soutenir le leadership et l'efficacité de l'enseignement dans les écoles de l'Ontario : L'art de questionner de façon efficace.

rétroaction de qualité à l'élève portant, entre autres, sur sa démarche de résolution de problèmes, sur les raisonnements en jeu ou sur la manipulation des différents registres, qui demeurent des éléments-clés du programme de formation.

Enfin, nous constatons que les élèves semblent avoir été habitués à produire une réponse de manière rapide[7]. Nous faisons l'hypothèse que cette façon de procéder (trouver la bonne réponse et y arriver rapidement) a été valorisée dans leur parcours scolaire. Il importe donc de prendre le temps nécessaire pour montrer aux élèves que les raisonnements mathématiques reposent sur la profondeur des idées, sur l'exploration, la découverte et non pas sur la rapidité à trouver une réponse et, pour cela, il faut leur proposer des situations qui demandent une telle activité.

### *1.1.5 La disparition de la communication du cadre d'évaluation ministériel*

Alors que nous poursuivions l'accompagnement d'enseignants dans la réflexion sur la communication mathématique et la mise en place d'activités en ce sens, ironiquement, en 2011, le Ministère a fait le choix de ne plus communiquer officiellement au bulletin l'évaluation de la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. En effet, cette année-là, le Ministère de l'éducation révisait son cadre d'évaluation des apprentissages[8] et précisait, pour les mathématiques, et plus spécifiquement pour la compétence de communication, que « cet élément doit faire l'objet d'une rétroaction à l'élève, mais ne doit pas être considéré dans les résultats communiqués à l'intérieur des bulletins » (MÉLS, 2011, p. 5). En d'autres termes, la compétence de communication demeure dans le programme, mais n'a plus à être évaluée formellement au bulletin. Ainsi, à la suite de ce nouvel écrit du Ministère, certains enseignants accordaient une moins grande place en classe au développement de la compétence de communication, particulièrement dans le contexte de l'évaluation : leur attention et leur temps (si précieux) étaient maintenant consacrés au développement et à l'évaluation des deux autres compétences disciplinaires, celles qui formaient le résultat officiel au bulletin[9]. Devant cette nouvelle directive, nous nous sommes d'autant plus questionné sur cette compétence et la place à y accorder.

### *1.1.6 Des épreuves officielles qui laissent peu de place à la communication*

En lien avec l'évaluation, nous avons également fait une autre constatation: les formes d'évaluation officielles produites par le Ministère laissent peu de place aux traces écrites laissées par les élèves. En effet,

[7] Pour les élèves à qui nous enseignions, en mathématiques, l'important pour eux était d'arriver à la bonne réponse, sans nécessairement poser un regard sur la démarche qui conduit à cette réponse.
[8] Il est possible de consulter en ligne ce cadre d'évaluation.
[9] Respectivement 30% de la note finale au bulletin pour la compétence *Résoudre une situation-problème* et 70% pour la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*. Toutefois, des éléments de communication étaient aussi développés au travers ces deux compétences. C'était d'ailleurs aussi la prétention du Ministère pour évacuer la compétence à communiquer du cadre prescriptif d'évaluation : cette compétence est intégrée aux deux autres.

les épreuves uniques[10] de 4e secondaire, par exemple, sont produites en trois parties : une partie de choix de réponses valant pour 24% (6 questions à 4 points chacune : l'élève peut avoir 0 ou 4); une partie de réponses courtes où la démarche exprimée par l'élève compte minimalement, soit pour 16% (4 questions à 4 points chacune : l'élève peut avoir un résultat de 0, 2 ou 4 points par question); et une partie à développement de 60% où la démarche de l'élève est mise en évidence. Ainsi, on peut estimer à près de 40% la part de l'évaluation où la communication de l'élève est peu considérée et où l'on insiste sur l'obtention d'une bonne réponse (les choix de réponses et les réponses courtes)[11].

Il semble donc y avoir un écart entre les attentes et les visées ministérielles quant au développement de la compétence de communication (qui doit faire l'objet d'une rétroaction) et l'opérationnalisation de l'évaluation de celle-ci faite dans la pratique (un écart entre l'intention et l'action). Si la compétence de communication est toujours présente au programme de formation dans une visée, disons, « formatrice », elle est quasi-absente du projet d'évaluation officiel des élèves.

En résumé, selon nos observations de praticien, la communication nous semble négligée en classe, tant par l'enseignant aux prises avec des directives ministérielles contradictoires (la communication est importante, mais on ne l'évalue pas), par des contraintes de temps, que par les situations qui sont typiquement proposées aux élèves, lesquelles ne permettent pas toujours le plein développement de la communication des élèves.

Afin de voir si ce que nous observions dans les classes de mathématiques est partagé par d'autres, nous avons exploré des recherches en lien avec la communication en mathématiques. Des constats et des défis semblables à ceux que nous avons notés quant à l'exploitation de la communication en classe, tant à l'oral qu'à l'écrit, se dégagent des recherches présentés dans la prochaine section.

### 1.2 L'exploitation de la communication en mathématiques : quelques difficultés issues de recherches

Quelques recherches mettent en évidence, d'une part, des difficultés relatives à l'engagement des enseignants dans un travail de communication avec leurs élèves; d'autre part, parmi les enseignants qui s'y engagent, certains se butent à des difficultés dans l'exploitation de la communication orale et écrite.

[10] Il s'agit des épreuves qui sont administrées à tous les élèves québécois à la fin de l'année scolaire et qui peuvent compter pour la constitution du résultat final de l'élève pour 50% de la note ou, pour certains cas d'élèves, même jusqu'à 100% du résultat, faisant foi alors de la réussite du cours.

[11] Dans la pratique, nous notons aussi que la forme d'épreuve de la 4e secondaire se transpose dans les autres niveaux. Ainsi, de la 1re à la 3e secondaire, la forme et les pourcentages attribués à chacune des parties des épreuves sont répétés afin de « bien préparer les élèves aux épreuves qui les attendent » (c'est souvent l'argument que nous entendons) les années suivantes.

### *1.2.1 Des difficultés relatives à l'engagement des enseignants dans un travail de communication orale en classe*

Il apparaît difficile de travailler la communication orale en classe de mathématiques. Tout d'abord, avec le changement de paradigme proposé par plusieurs programmes de formation (comme avec l'approche par compétences préconisée au Québec), les méthodes d'enseignement ne ressemblent pas à celles que les enseignants ont connues étant eux-mêmes élèves ou même à leurs premières années d'enseignement (Anderson, D.S. et Piazza, J.A., 1996; Bruce, 2005). Conséquemment, les enseignants peuvent être décalés par rapport à ce qu'ils ont vécu et leur premier réflexe revient à la reproduction du modèle plus connu, souvent magistral, où les échanges bidirectionnels sont moins fréquents.

Aussi, certains enseignants n'ont pas confiance en leurs propres connaissances mathématiques (Bibby, 1999), lesquelles sont encore plus sollicitées si l'on veut favoriser la communication et animer des discussions mathématiques en classe. Favoriser les échanges oraux en classe peut facilement amener l'enseignant dans l'incertitude et le forcer à improviser devant des stratégies inattendues mises de l'avant par les élèves. Conséquemment, l'enseignant doit maîtriser l'ensemble des savoirs en jeu dans les problèmes proposés, anticiper les stratégies possibles, s'il souhaite notamment être à même de travailler les raisonnements qui émergent des explications des élèves. Il doit accepter d'entrer dans une zone d'incertitude en utilisant les réponses et les stratégies avancées par les élèves et cela demande un certain degré d'aisance avec les savoirs mathématiques.

Engager l'élève dans un travail de communication orale implique nécessairement aussi de revoir sa gestion de classe et d'avoir confiance en sa capacité de reprendre le contrôle (Bruce, 2007). En plus, l'enseignant doit savoir encourager les élèves à justifier leur solution (Cobb, Bauersfeld, 1995), à s'entraider (Hufferd-Ackles, Fuson, K.C. et Gamoran-Sherin, 2004) en vue de mener à une construction collective des savoirs mobilisés dans les échanges. Pour favoriser les échanges entre les élèves, l'enseignant doit aussi apprendre à se retirer pour permettre aux élèves de discuter afin de construire ensemble le sens des savoirs en jeu (Bruce, 2007). Cette transmission du contrôle d'une partie des apprentissages aux élèves n'est en effet pas toujours évidente à faire par l'enseignant. L'espace dévolu à chacun, élève comme enseignant, dans la relation didactique et la progression du temps didactique qui l'accompagne demeurent des enjeux dans la classe (Mercier, 1992, 2001; Giroux et René de Cotret, 2001).

Le manque de temps en salle de classe pour « passer le programme » est souvent aussi invoqué comme argument pour éviter d'échanger oralement avec les élèves (Black, 2004). Les enseignants mentionnent ne pas avoir d'espace temporel pour que les élèves partagent leurs stratégies, débattent sur leurs idées mathématiques ou sur les connaissances erronées qui émergent d'échanges avec les camarades de classe. Ils notent aussi avoir peu d'occasions de développement professionnel sur le sujet (Bruce, 2007).

Si la mise en place de situations de communication orale semble presque impossible pour certains enseignants, d'autres trouvent pourtant des façons d'y arriver ou, du moins, essaient de s'y engager. En effet, la recherche s'est aussi intéressée aux enseignants qui mettent en place des moments de communication orale en classe. Nous verrons que, même si des enseignants essaient de s'engager dans un travail de communication orale, il n'est pas toujours facile d'en tirer profit.

### *1.2.2 Des difficultés à amener les élèves à communiquer oralement*

Dans une recherche faite auprès d'élèves de 6 à 10 ans présentant des difficultés d'apprentissage et des troubles du langage, Giroux (2004) a analysé les interactions langagières centrées sur le repérage et le traitement des erreurs. L'auteure a mis en évidence le fait que, souvent, l'enseignant, devant l'erreur d'un élève, lui demandera d'expliquer son raisonnement dans le cadre d'une situation de formulation avec « l'intention […] que le passage au registre de l'oral va permettre à l'élève de prendre conscience de son erreur et de la rejeter » (Giroux, 2004, p. 311). Cependant, précise l'auteure, « le passage de l'action à la formulation ne relève pas d'un simple jeu de calque » (Ibid., p. 311). Elle renchérit en citant Vergnaud:

> « La mise en mots des connaissances-en-acte est difficile. […] Dans l'action, nous ne prélevons qu'une petite partie de l'information présente et nous en utilisons une partie plus petite encore. Dans la communication, nous sommes encore plus sélectifs, et laissons à autrui la charge de reconstituer, à partir de brides d'énoncés et de rares énoncés complets, qui sont le lot habituel de la communication orale dans le travail, le sens des messages que nous lui envoyons » (Vergnaud, 1998, p. 289-290).

Vergnaud met en évidence la difficulté, notamment des élèves, à bien expliciter oralement leur raisonnement lorsque questionnés par l'enseignant. Il montre l'écart existant entre ce qui est effectivement dit et ce que l'on souhaite dire. En communication orale, il y a un certain transfert de responsabilité avec l'interlocuteur sur le sens des messages envoyés. Implicitement, on lui demande d'inférer le sens à partir de certains énoncés oraux.

En classe de mathématiques, alors qu'ils sont souvent en train de rédiger des calculs, d'organiser leur raisonnement, etc., les élèves demeurent dans l'agir et ils n'ont pas de raison de discourir sur leurs actions, de prendre une distance par rapport à ces dernières. Au sens de Chevallard (1991b), on pourrait dire que les élèves ne sentent pas le besoin d'entrer dans un discours sur les techniques mobilisées dans l'action, soit dans un discours technologique[12]. Les élèves ne formulent pas, pour autrui, le travail mathématique qu'ils accomplissent. Ils décrivent souvent les étapes de leurs actions (« *premièrement, j'ai fait cela…, ensuite cela…* ») ou ils parlent sommairement des actions qu'ils ont mises en jeu (« *j'ai envoyé les termes constants du même côté de l'équation…* »).

[12] Nous reviendrons plus en détails sur cette partie de la *Théorie anthropologique du didactique* dans le deuxième chapitre.

Si le travail de communication orale en classe n'est pas nécessairement facile à mettre en œuvre, car il ne suffit pas de le demander comme on vient de le voir, on pourrait s'attendre à ce que la communication écrite, elle, se fasse plus facilement, puisqu'on a toujours demandé aux élèves de présenter leur solution par écrit. Or, même la communication écrite pose des défis pour l'élève et l'enseignant.

### *1.2.3 Des difficultés dans la mise en œuvre de la communication écrite*

S'en tenir à la rédaction d'une solution ne permet pas d'exploiter tout le potentiel de la communication écrite. En effet, comme le précise Rauscher (2006, p. 2)[13], la communication mathématique sous forme d'écrits n'intervient principalement qu'à la fin de l'activité mathématique privant, en quelque sorte, l'élève d'occasions de prise de conscience:

> « […] on peut voir que les écrits ont une place de plus en plus reconnue dans le processus de développement des connaissances mathématiques. Mais quel est le rôle dévolu à cette activité d'écriture ? Souvent l'écrit est envisagé en tant que production utilisable pour servir de matériau à un échange ou d'outil de mémoire à consulter. Les écrits n'interviennent alors qu'au terme ou en marge de l'activité mathématique ».
>
> « Dans cette perspective, c'est l'écriture en tant qu'activité d'expression spécifique et le rôle important qu'elle joue dans la prise de conscience et la réflexion qui sont ignorés » (Rausher, 2006, p. 2).

Ignorer les rôles de la communication par l'écrit en ne proposant pas aux élèves des moments favorisant une prise de conscience paraît mettre de côté une série d'éléments susceptibles de fournir à l'enseignant des points d'ancrage pour permettre aux élèves de développer et d'exprimer leur compréhension des savoirs mathématiques mobilisés. Conséquemment, son enseignement est moins riche et a certainement moins d'impact.

Sierpinska (1998), quant à elle, dénonce l'insistance de quelques enseignants à prôner une structure, une démarche, et même une « netteté » d'écriture mathématique pour aider les élèves à participer au discours mathématique écrit. Cela faisant en sorte, pour la chercheure, d'induire un stress sur la production, au détriment du sens et de la créativité :

> "[…] in trying to facilitate the participation of students in the mathematical discourse, the teacher stresses the convention of proper writing. For example, some teachers stress a certain type of presentation for the solution of an equation or a system of equations. Each step must be written in a new paragraph, the same variables in a system should be written exactly one under the other, [etc]" (Sierpinska, 1998, p. 56).

Cette préoccupation de la forme, parfois au détriment du fond, n'est pas étrangère à ce que nous avons pu voir dans notre pratique, comme conseiller pédagogique et directeur d'établissement. Nous avons en effet déjà observé, lors d'activités de correction collective, des notes attribuées très différentes pour une

[13] En référant à ses observations de l'enseignement dans le système d'éducation français à l'école primaire.

même production selon que le regard des enseignants est centré sur des éléments de structuration de la démarche ou sur les raisonnements sous-jacents.

En somme, il se dégage des différentes recherches évoquées que l'engagement des enseignants à communiquer avec les élèves n'est pas chose facile: ils y voient de réels obstacles et n'osent s'y aventurer. Par ailleurs, même si des enseignants travaillent la communication en classe, des chercheurs soulèvent que certaines activités ne permettent pas un plein accès aux sens des savoirs mathématiques mobilisés par l'élève ou s'orientent vers des dimensions de la communication liées davantage à la forme, soit la structure et la netteté, plutôt qu'au fond (les raisonnements en jeu, les conceptions erronées, etc.).

À partir de ces difficultés, on peut alors se demander si le jeu en en vaut la chandelle. C'est-à-dire, s'il est si ardu de mettre en place des activités visant à communiquer en classe de mathématiques, pourquoi alors chercher à faire communiquer les élèves ? Peut-être cela n'est-il pas nécessaire?

Or, comme nous le verrons dans la section qui suit, de nombreux programmes de formation accordent une place de choix à la communication en mathématiques, dont le programme de formation de l'école québécoise. Ces programmes reflètent, en quelque sorte, l'importance de la communication en mathématiques qui a été mise en évidence par la recherche en didactique.

## 1.3 L'importance de la communication dans la formation mathématique des élèves

Au Québec, bien que retirée du projet d'évaluation (pour le bulletin), la compétence *Communiquer à l'aide du langage mathématique* est toujours présente dans le programme de formation et demeure l'une des trois compétences disciplinaires à développer chez l'élève. Cette section présente, dans un premier temps, les attentes et la position ministérielle, tant sur le concept de compétence au sens large, que sur celui de la compétence à communiquer. La place de la communication dans d'autres programmes de formation et dans l'activité mathématique sera aussi explorée.

### *1.3.1 Le concept de compétence selon le Ministère de l'éducation du Québec*

L'approche d'enseignement par objectifs laisse difficilement sa place à l'approche par compétences préconisée par les programmes de formation actuels, soit depuis 2003 pour l'enseignement secondaire. En effet, nous constatons, encore aujourd'hui, que des enseignants morcellent les compétences, à la manière des objectifs, lorsque vient le temps de les développer et de les évaluer. Legendre (2004b) avait d'ailleurs soulevé ce problème en mentionnant qu'il y a un équilibre à trouver entre simplement définir le concept de compétence et le décrire de manière plus exhaustive. Elle explique :

> « Donner une simple définition des compétences ne suffit pas : il faut réussir à les rendre opératoires. Il faut donc parvenir à en expliciter le « contenu » et à en décrire les principaux éléments constitutifs. Or, si l'on souhaite trop préciser la description des compétences, il y un risque de retomber dans « les dérives des programmes par objectifs », morcelés, où le sens des apprentissages est perdu » (Legendre, 2004b, p. 4)

Dans une pédagogie par objectifs, il y avait une perte de sens puisque les apprentissages étaient si découpés, si séquentiels, et par conséquent, si décontextualisés, que les élèves retrouvaient peu de sens à leurs apprentissages. En réponse à cela, la « compétence » est introduite dans les programmes pour mieux consolider le sens des apprentissages dans un contexte plus global. Ce sens étant lié justement à la capacité de faire une utilisation efficace des savoirs. Pour le Ministère donc, la compétence est « un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources » (MELS, 2003, p. 7, largement inspiré des idées de Le Boterf (1994) et Perrenoud (1999; 1999a)).

Le « savoir-agir » constitue, pour Scallon (2004, p. 105), « la capacité de recourir aux acquis scolaires comme aux acquis de la vie courante ». On comprend déjà que la notion de compétence dépasse strictement le cadre des connaissances scolaires. Le « savoir-agir » mobilisé dans l'expression d'une compétence doit dépasser le simple réflexe ou l'automatisme. L'élève doit avoir l'intention (donc être conscient) de l'utilisation des ressources qui peuvent être de plusieurs ordres : acquis scolaires, expériences, habiletés et centres d'intérêt, de même que ses pairs, ses enseignants, des experts, ou encore des sources d'informations de diverses natures (MELS, 2003, p. 7).

Le Ministère précise également que :

> « …la compétence dépasse la simple addition ou juxtaposition d'éléments. Elle se manifeste dans des contextes d'une certaine complexité et son degré de maîtrise peut progresser tout au long du parcours scolaire et même au-delà de celui-ci » (MELS, 2003, p. 9).

De cette dernière citation, deux idées apparaissent essentielles. D'abord, celle de la complexité: une compétence se manifestera dans des contextes complexes. En fait, on privilégie maintenant une entrée par les situations qui sont en soi plus globales et interdisciplinaires (Jonnaert, 2002). Les situations d'apprentissage sont au cœur du développement des compétences puisqu'elles placent l'élève dans l'agir où il devra mobiliser des ressources multiples et ainsi développer plusieurs compétences disciplinaires et transversales[14].

Ensuite, comme nous l'avons présenté d'entrée de jeu dans cette section, la compétence ne doit pas être perçue comme une multitude de micro-habiletés (ou d'objectifs à atteindre) que l'on souhaite voir développées chez les élèves. Elle a un caractère « systémique » (Legendre, 2004a) : une compétence ne réside pas dans la somme, mais plutôt dans l'organisation dynamique de plusieurs composantes.

Nous en inférons donc que l'idée de compétence est elle-même complexe et qu'il n'est pas évident de pouvoir attester de l'atteinte ou non d'une compétence par les élèves. Le Ministère a, par ailleurs, défini chacune de ses trois compétences disciplinaires en mathématiques en y présentant des composantes et en y

[14] Rebaptisées compétences « non-disciplinaires » dans la foulée de l'imposition du bulletin unique de 2011

définissant des critères d'évaluation permettant de guider l'enseignant dans l'observation des élèves dans un ensemble de situations pour une même compétence. Il importe donc de pouvoir définir quelles sont ces composantes pour chacune des compétences et, dans le cas qui nous occupe, pour la compétence à communiquer (voir **l'annexe 1** pour les libellés des trois compétences).

La prochaine section présente le point de vue du Ministère de l'éducation sur les attentes concernant la communication en mathématiques. Cette présentation permet de constater quelles sont les visées ministérielles quant au développement de la communication et quels en sont les éléments constitutifs.

#### *1.3.1.1 Communiquer à l'aide du langage mathématique : définition, visées et importance*

Le Ministère nomme l'une de ses trois compétences disciplinaires comme « *Communiquer à l'aide du langage mathématique* ». Pour le Ministère, communiquer, c'est « interpréter, produire, transmettre et réguler des messages en combinant le langage courant et des éléments spécifiques du langage mathématique : concepts et registres (termes, symboles et notations) » (2003, p. 247).

Par le développement de cette compétence, on cherche à ce que l'élève clarifie, structure sa pensée et nuance ses idées. Elle lui offre l'occasion d'apprendre des concepts et des processus ou encore de renforcer ses apprentissages. Elle suppose l'appropriation et la coordination des éléments du langage mathématique incluant différents registres (linguistique, symbolique, graphique, tabulaire et figural).

Le développement de cette compétence, selon la lecture du programme, a trois visées: s'approprier et consolider des éléments du langage mathématique; interpréter un message ou le produire pour expliquer une démarche ou un raisonnement; respecter certaines des exigences de la communication telles que savoir établir un plan de communication, tenir compte de l'interlocuteur dans le choix des outils mathématiques, choisir un discours ou une forme de rédaction selon l'intention de communication (informer, justifier ou prouver) et s'ouvrir à différents points de vue.

Dans le processus de communication mathématique défini par le Ministère, l'élève cerne le contexte (l'objet, l'intention du message et l'interlocuteur ciblé) des messages qu'il traite. Il ajuste son discours selon ce contexte, et ce, dans des situations qui l'amènent à communiquer autant oralement que par écrit, autant dans un rôle de « récepteur » que « d'émetteur ». C'est ainsi qu'il développe des capacités d'écoute et d'expression indispensables à l'exercice de cette compétence.

Toujours selon le Ministère, l'élève qui communique à l'aide du langage mathématique structure ou organise ses idées en exploitant et en intégrant un ensemble de savoirs et leurs interrelations. Il choisit une forme de discours (descriptif, explicatif, argumentatif, démonstratif) et des éléments mathématiques (concepts et registres) susceptibles de rendre l'objet du message compréhensible pour l'interlocuteur ciblé et d'atteindre l'intention de communication (décrire, informer, expliquer, persuader, illustrer, etc.).

La communication, selon la perspective du Ministère, apparaît indissociable des deux autres compétences disciplinaires à développer : *déployer un raisonnement mathématique* et *résoudre une situation-problème*. En effet, l'élève doit recourir à la compétence à communiquer, par exemple, pour formuler des conjectures ou réaliser des preuves, deux composantes importantes du *raisonnement*. De même, pour *résoudre* un problème, il doit notamment décoder les éléments pertinents du problème, les représenter par un modèle et produire un message pour expliquer une démarche ou un raisonnement. Pour l'une et l'autre des compétences, on constate que la communication est essentielle.

Bien que le Ministère maintienne son intérêt à développer la communication dans son programme, rappelons toutefois une certaine incohérence dans les messages envoyés aux enseignants : d'un côté, le programme de formation semble avoir une vision assez ambitieuse du développement de la communication en mathématiques, mais, d'un autre côté, il n'y accorde pas une place de choix lorsque vient le temps de communiquer l'atteinte ou non des critères d'évaluation dans les outils officiels. Au final, il appert que l'importance accordée à cette compétence soit diminuée par son exclusion du processus formel d'évaluation.

Une diminution de l'importance accordée à la communication mathématique dans les classes québécoises constitue-t-elle un problème ? Si l'on se fie à la place importante accordée à la communication dans différents autres programmes de formation, on peut penser que oui. En effet, plusieurs programmes de formation voient un intérêt à développer la communication en mathématiques.

#### *1.3.2 L'importance de la communication au travers d'autres programmes de formation*

Afin d'analyser la place occupée par la communication hors du programme québécois, nous avons parcouru quelques programmes mathématiques récemment révisés: les programmes développés par un partenariat de sept Ministères de l'Éducation du Canada (*Alberta, Colombie-Britannique, Manitoba, Nunavut, Saskatchewan, Territoires du Nord-Ouest et Territoires du Yukon*; 2007); le programme de la province du Nouveau-Brunswick (2000); le programme de la province de l'Ontario (2005); le programme de la Belgique (Ministère de la Communauté française, 2000); et, finalement, le programme de la France (2007).

Qu'on la qualifie de compétence (Québec, 2003), de processus (Alberta, 2007; Ontario, 2005), de but à atteindre (Alberta, 2007), de capacité (France, 2007), de résultat d'apprentissage transdisciplinaire (Nouveau-Brunswick, 2000) ou d'objectif (Ontario, 2005), la communication occupe une place de choix dans de nombreux programmes de formation en mathématiques. Nous avons synthétisé plusieurs apports selon diverses thématiques, en rassemblant les idées avancées dans les programmes analysés. Ainsi, la communication en mathématiques permettrait :

*Au plan des connaissances et des savoirs mathématiques :*

- la réflexion et une clarification de sa pensée;

- de favoriser une meilleure compréhension des concepts et processus qui seront mieux réinvestis en résolution de problèmes;
- de créer la construction ou la co-construction du sens relié aux savoirs mathématiques;
- d'établir des liens entre certains savoirs, concepts et représentations mathématiques;
    - d'expliciter des liens entre savoirs conceptuels et procéduraux;
    - d'expliciter des liens entre diverses représentations de concepts ou de procédures mathématiques;
    - d'expliciter des liens entre les notions informelles, intuitives, quotidiennes et le langage abstrait et symbolique des mathématiques.

*Au plan social :*

- d'initier la discussion de groupe autour de problématiques d'ordre mathématique;
- d'entrer en relation avec ses pairs de manière à partager ses idées, à discuter ou à réviser;
- d'entrer en relation avec différents auditoires et conséquemment d'adapter son discours;
- de réinvestir ses habiletés de communication dans d'autres disciplines;

*Au plan affectif :*

- de pouvoir représenter ses travaux sous la forme qui les valorise mieux, de façon claire et concise, pour les rendre utilisables par d'autres;
- de renforcer positivement son attitude face aux mathématiques ;

*Pour l'enseignant :*

- de déterminer le niveau de compréhension de ses élèves.

La revue des programmes de formation analysés semble montrer plusieurs avantages à la communication en classe de mathématiques. Ainsi, le Ministère de l'éducation du Québec n'est-il pas le seul à faire une place à la communication dans le programme de mathématiques : les programmes de mathématiques d'autres provinces, tout comme celui de la France, en font aussi mention explicitement et semblent y voir une contribution importante au développement de l'élève. L'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE, 2003) en fait aussi un élément fondamental de ce qu'elle décrit comme une activité mathématique.

#### *1.3.2.1 La communication dans le programme de l'OCDE*

En s'appuyant sur les travaux de Niss (1999), le programme de l'OCDE utilise une classification en huit catégories pour décrire une activité mathématique. De ces huit catégories, nous remarquons (et nous les avons soulignées) des références implicites ou explicites à des éléments de communication. La communication paraît donc au cœur de l'activité mathématique selon la catégorisation de l'OCDE. Voici les catégories définies par l'OCDE:

1. « **Pensée et raisonnement mathématique :** savoir poser des questions à caractère mathématique; connaître le genre de réponses que les mathématiques donnent à de telles questions; faire la distinction entre différentes sortes d'énoncés; comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques donnés, et pouvoir en tenir compte.
2. **Argumentation mathématique :** savoir ce que sont des démonstrations mathématiques et en quoi elles diffèrent des autres types de raisonnements mathématiques; suivre et évaluer des enchaînements d'arguments mathématiques de nature diverse; posséder un sens heuristique; et savoir développer et exprimer des arguments mathématiques.
3. **Communication mathématique :** Savoir s'exprimer de diverses manières sur des sujets à contenu mathématique, aussi bien à l'oral que par écrit, et comprendre les énoncés écrits ou oraux produits par d'autres sur de tels sujets.
4. **Modélisation :** savoir structurer le champ ou la situation à modéliser; traduire la « réalité » en structures mathématiques; interpréter des modèles mathématiques; valider le modèle; réfléchir, analyser et proposer une critique du modèle et de ses résultats; pouvoir communiquer avec autrui à propos du modèle et de ses résultats; gérer et contrôler le processus de modélisation.
5. **Création et résolution de problèmes :** savoir poser, formuler et définir différentes sortes de problèmes mathématiques; et résoudre différentes sortes de problèmes mathématiques en utilisant divers moyens.
6. **Représentation :** savoir décoder et encoder, transposer, interpréter et distinguer les différentes formes de représentations d'objets et de situations mathématiques ainsi que les relations entre ces diverses représentations; savoir choisir entre différentes formes de représentations et passer des unes aux autres en fonction de la situation et du but recherché.
7. **Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique :** savoir décoder et interpréter le langage symbolique et formel, et comprendre sa relation avec le langage naturel; traduire le langage naturel en langage symbolique et formel; savoir se servir d'énoncés et d'expressions contenant des symboles et des formules; utiliser des variables, résoudre des équations et effectuer des calculs.
8. **Utilisation d'instruments et d'outils :** connaître et être capable d'utiliser divers instruments et outils qui peuvent être utiles à l'activité mathématique, et connaître leurs limites » (2003, p. 45).

Le programme de l'OCDE intègre des éléments de communication dans plusieurs catégories venant qualifier *sa définition* de l'activité mathématique. Ces catégories mettent aussi en évidence la variété des langages disponibles pour s'exprimer en mathématiques, notamment le langage symbolique. L'algèbre constitue donc un moyen privilégié voire essentiel pour communiquer en mathématiques.

Dans la prochaine section, nous décrirons l'activité du mathématicien afin de dégager quelques spécificités de la production du savoir mathématique par le mathématicien et de faire émerger les rôles de la communication à travers cette même activité.

### *1.3.3 La place de la communication dans l'activité mathématique*

La communication dont les divers programmes de formation souhaitent favoriser la manifestation s'inscrit dans une activité mathématique. Il importe de s'intéresser à cette activité et de voir comment la communication y est liée. Nous verrons que la communication est nécessaire à la mise en œuvre de l'activité mathématique.

### *1.3.3.1 L'activité du mathématicien*

Giaquinto (2005) a différencié des phases dans l'activité du mathématicien : la découverte, l'explication, la justification et les applications. De ces phases, on passe graduellement de l'élaboration des savoirs mathématiques vers une diffusion plus large dans la communauté scientifique. On peut également dire que le travail du mathématicien passe d'une sphère plutôt privée vers une sphère publique qui concerne sa communauté. Il mentionne aussi la nécessité pour un chercheur de s'approprier les découvertes des autres chercheurs. Mais cette appropriation des découvertes des autres n'est possible, pour des mathématiciens, que lorsqu'ils arrivent à arrimer leurs pensées, à se comprendre.

Conne (1999) a mis en évidence l'importance de la synchronisation des pensées en s'intéressant au travail des mathématiciens. Il s'est interrogé, à partir de ses travaux de formateur et de chercheur dans le cadre de l'enseignement spécialisé, sur ce qu'est faire des mathématiques (pour le mathématicien), pour ensuite voir comment ce travail se transpose en classe. Pour Conne, faire des mathématiques servirait « à créer et animer des objets de pensées », lesquels objets ne sont pas matériels: c'est « la pensée qui en est la substance » (1999, p. 31). Les objets mathématiques n'existent ainsi que par la représentation qu'un sujet s'en fait. Ils ne se manifestent qu'après une série d'opérations, d'actions et dépendent aussi du contrôle que le sujet a sur ces dites opérations. C'est dans ce contexte qu'il en est venu à décrire les objets mathématiques comme succédant à l'action, tout en mentionnant l'importance de la communication entre mathématiciens pour avoir accès aux objets mathématiques construits.

De ces travaux de Giaquinto (2005) et Conne (1999) sur l'activité du mathématicien se dégagent certaines zones de convergence dans les descriptions de cette activité. En effet, le mathématicien est tout d'abord dans une phase d'action (de réflexions, d'essais, de questionnement, de réaménagement de connaissance), mais il ne peut en rester là, son invention serait vaine et non reconnue. S'il souhaite être validé par sa communauté, le mathématicien doit ensuite partager les résultats qu'il a trouvés dans une phase de communication auprès de ses pairs. Ce n'est qu'à ce moment que son résultat s'inscrira dans ce que Chevallard (1985) appelle le savoir savant, après que le mathématicien ait fait un travail de présentation et de vulgarisation.

### *1.3.3.2 L'activité du mathématicien et la communication : deux concepts intimement liés*

Alors qu'il est en cheminement dans son invention, le mathématicien est en action avec des objets mathématiques. Il manipule ces objets, par le biais de calculs, d'essais numériques, de symboles mathématiques, d'équations ou de relations, de jeux sur des registres de représentations, etc. Il est dans une phase de communication interne avec lui-même, disons dans un discours intérieur de validation. Puis, pour valider certaines de ses hypothèses, il peut discourir avec un collègue, par exemple, pour explicitement présenter ses résultats, interagir avec lui dans un but de confronter ses idées, de les faire évoluer et de poursuivre son avancement dans son travail mathématique. Enfin, il devra tenter de convaincre que ses idées sont vraies, mathématiquement appuyées. Pour ce faire, il devra argumenter, à partir de théorèmes et de savoirs mathématiques déjà reconnus, que ses résultats ont aussi leur place dans sa communauté. S'ils sont démontrés et attestés, ils s'inscriront dans le savoir mathématique.

Une activité mathématique met donc en jeu des éléments essentiels de communication qui ont des intentions distinctes : une intention de communication et de validation pour soi; une intention d'interaction avec autrui (pour faire avancer le savoir); et une intention d'argumentation, de validation du savoir. Dans un livre sur la recherche en mathématique, Hadamard (1954) mentionne explicitement l'existence d'un travail privé chez le chercheur dont une phase est la vérification des résultats afin de pouvoir les rendre publics à sa communauté.

Dans un objectif de partage de ses inventions avec l'ensemble de sa communauté, le mathématicien doit rendre ses résultats aussi accessibles que possibles. Une fois accepté par la communauté scientifique, ce nouveau savoir s'inscrira alors dans le savoir savant, lequel est souvent rédigé avec une présentation axiomatique : les objets sont définis, les propriétés sont indiquées, etc. Cette présentation occulte toutefois l'histoire de la construction des savoirs savants, les questions qui ont conduit à leur apparition, les difficultés qui ont été rencontrés et les choix qui ont été faits.

Le mathématicien donne ainsi à ses découvertes une forme générale. Il fait ce que Brousseau (1988) appelle de la « didactique pratique », c'est-à-dire qu'il met le savoir sous une forme « décontextualisée, dépersonnalisée et détemporalisée » (Ibid, p. 1). « Ce travail est indispensable pour que le lecteur puisse prendre connaissance de ces résultats et se convaincre de leur validité sans faire lui-même le même cheminement pour leur découverte, tout en bénéficiant des possibilités qu'ils offrent pour leur utilisation » (Brousseau, p. 48).

En résumé, afin de communiquer ses résultats, le mathématicien doit donc réaménager sa pensée, y synthétiser les réflexions qui l'ont conduit à un savoir nouveau qu'il souhaite communiquer. On constate donc que la nature même de l'activité mathématique est intrinsèquement sociale et que la communication y joue un rôle majeur. Il n'est donc pas étonnant que de nombreux programmes de formation accordent une grande importance au développement de la communication en mathématiques.

D'ailleurs, l'approche préconisée pour l'enseignement des mathématiques dans le programme de formation québécois fait en quelque sorte écho à l'activité du mathématicien comme nous allons le montrer brièvement.

### 1.3.3.3 *L'activité mathématique au cœur du programme de formation québécois*

Nous avons vu précédemment que le programme de formation québécois en mathématiques cherche à faire développer par les élèves trois compétences qui se distinguent par les aspects qu'elles ciblent en priorité, mais qui se réunissent dans ce que le ministère appelle « la pensée mathématique » (MÉLS, 2003, p. 243).

Ces trois compétences sont interdépendantes et se développent de manière synergique à partir de situations d'apprentissage qui, « d'une part, misent sur la participation active de l'élève et le recours au processus de résolution de problèmes et, d'autre part, offrent une certaine flexibilité tant dans le choix des modes de représentation que dans le passage d'un mode de représentation à un autre » (Ibid., p. 237). Pour développer ces compétences, on souhaite que l'enseignant rende l'élève actif dans ses apprentissages en créant une communauté d'apprentissage.

> « L'élève est actif lorsqu'il s'engage dans des activités de réflexion, de manipulation, d'exploration, de construction ou de simulation et qu'il participe à des discussions au cours desquelles il peut justifier des choix, comparer des résultats et tirer des conclusions. Il doit alors recourir à son intuition, à son sens de l'observation, à son habileté manuelle et à sa capacité d'écouter et de s'exprimer, ce qui favorise l'acquisition » (Ibid., p. 237).

Le programme souligne aussi que :

> « Il importe aussi de placer l'élève dans des situations qui exigent des justifications ou des réponses à des questions telles que « *Pourquoi?* », « *Est-ce toujours vrai?* » ou encore « *Qu'arrive-t-il lorsque...?* », et ce, dans tous les champs de la mathématique. On souhaite ainsi amener l'élève à raisonner, à s'approprier des savoirs mathématiques, à interagir et à expliquer sa démarche. Il est ainsi encouragé à réfléchir dans et sur l'action, et à faire face à la nouveauté » (MELS, 2003, p. 237).

Le programme de formation québécois, vise ainsi à ce que l'élève s'engage dans un travail de découverte, d'explication, de justification et d'applications des savoirs développés, soit dans chacune des phases qui définissent une activité mathématique. On pourrait considérer que ce que préconise le programme s'apparente à une genèse artificielle des savoirs telle que décrite par Brousseau (1986).

## 1.4 Vers une première question de recherche

Étant donné :

- les difficultés à exploiter, en classe, la communication orale et écrite, que nous avons constatées;
- des constats semblables de chercheurs qui identifient des difficultés pour l'enseignant à s'engager dans des activités en vue d'exploiter la communication en classe;

- les constats de chercheurs selon lesquels même si certains enseignants essaient de s'engager dans des activités de communication orales ou écrites avec leurs élèves, il n'est pas toujours facile pour eux d'en tirer profit;

- la présence importante de la communication, tant dans sa dimension orale qu'écrite, à travers plusieurs programmes de formation nationaux et internationaux;

- que la communication est un élément essentiel de l'activité mathématique;

  il paraît évident qu'il faille trouver des façons d'outiller les enseignants pour mener à bien le travail sur la communication avec leurs élèves.

Ce constat général conduit à poser une première question de recherche : *comment organiser un enseignement de manière à favoriser et à faciliter une communication en classe utile et nécessaire à l'apprentissage des mathématiques ?*

En vue de répondre à cette question, nous souhaitons orienter notre recherche sur le développement de situations à mettre en place en classe afin de solliciter divers éléments de la communication et proposer aux enseignants des outils qui s'avéreront utiles pour favoriser un travail de communication au sein d'une activité mathématique.

# CHAPITRE 2
# CADRE THÉORIQUE

La problématique développée au chapitre précédent a montré l'importance, l'intérêt et la difficulté d'organiser un enseignement des mathématiques qui invite les élèves à communiquer, cela s'avérant essentiel à l'activité mathématique et à l'apprentissage de cette discipline.

Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons tout d'abord la communication puis la distinguons de l'interaction. Suit une présentation des différents modes d'expression qui caractérisent la communication en mathématiques. Nous synthétisons ensuite quelques résultats de recherches qui identifient des apports de la communication, tant orale qu'écrite, en classe de mathématiques. Ces apports nous mèneront à constater que l'argumentation est au cœur de la communication en mathématiques. En effet, l'élève ne doit pas seulement expliciter son raisonnement mathématique, il doit aussi avancer vers une démarche de validation et de preuve. À cet égard, la communication devient un outil pour l'argumentation. Les travaux de Chevallard (1991a; 1991b; 1998) et Balacheff (1987; 1988), présentés par la suite, permettent de décrire l'argumentation et d'en préciser différents niveaux. Cela nous conduira à proposer une première caractérisation d'une communication riche et pertinente en classe de mathématiques. Enfin, les travaux de Demers et Radford (2004) viendront apporter d'autres éléments permettant de qualifier une communication riche.

La question de l'organisation de l'enseignement des mathématiques, en fonction de l'apprentissage qui pourrait en découler, étant aussi au cœur du présent projet de recherche, il importe de référer à un modèle théorique qui permette de décrire de manière systématique cette organisation. La *Théorie des situations didactiques* (TSD) est le modèle retenu et il est présenté en deuxième partie de ce chapitre. La TSD modélise l'activité mathématique et la façon dont celle-ci peut se transposer en classe, c'est-à-dire quel type d'organisation des relations enseignant-élèves-savoir peut être proposé. Ce faisant, les rôles importants que joue la communication, tant dans l'activité mathématique du mathématicien que dans celle de l'élève seront montrés.

La lumière apportée par ces assises théoriques sur les différents éléments de la recherche conduira à préciser ou à reformuler les objectifs de recherche.

## 2.1 La communication et les interactions

Étymologiquement, le mot communication vient du latin « communicare » qui signifie « mettre en commun ». Selon le Larousse (**en ligne**), la communication est « l'action de communiquer avec quelqu'un, d'être en rapport avec autrui, en général, par le langage ». Précédemment, nous avions retenu une définition de travail, issue du dictionnaire de l'Éducation de Legendre (1993), soit « le fait de manifester sa pensée ou ses sentiments, par la parole, l'écriture, le geste, la mimique, dans le but de se faire comprendre » (1993, p. 216). Cette section cherche à approfondir et à préciser cette définition.

D'abord, distinguons la communication verbale et la communication non-verbale évoquées dans la définition de Legendre (1993). La communication verbale est constituée de signes linguistiques contenus dans un langage[15]. Toutefois, Kibler et al. (1970), dans une taxonomie du domaine psychomoteur, définissent les comportements verbaux comme la :

> « Production du son : aptitude à produire des sons significatifs, audible […];
>
> Formulation son-mot : aptitude à coordonner les sons en mots et en messages significatifs […];
>
> Projection du son : niveau adéquat pour la réception et le décodage par l'interlocuteur […];
>
> Coordination son-geste : exemple : étant donné un message verbal de trois minutes, le transmettre en la moitié moins de temps, sans réduction importante de la compréhension, par l'addition de gestes et de mouvements corporels coordonnés au message verbal[16] » (rapporté dans Legendre, 1993, p. 1332).

Dans l'esprit de cette taxonomie, la communication verbale se rapporte à tout ce qui s'exprime de vive voix (on pourrait aussi parler de communication orale). La communication verbale s'oppose donc, dans cette optique, à la communication écrite.

Bibeau (1982), quant à lui, propose que « la communication verbale se fait dans quatre formes ou modes possibles : deux modes passifs (écouter et lire); deux modes actifs (écrire et parler) » (rapporté dans Legendre 1993, p. 219). Dans cette proposition, la communication verbale ne se limite pas à la communication orale, elle englobe l'usage d'un langage oral et écrit. L'écriture et la voix sont alors des moyens de communiquer. Selon la proposition de Bibeau, la communication se fait dans des modes passifs et actifs. Les modes passifs (écouter et lire) sont décrits par Bibeau comme une série d'étapes que nous résumons ainsi:

1. La transmission des ondes sonores de l'énoncé ou des caractères écrits au cerveau;
2. La mémorisation de l'énoncé dans la mémoire courte;

[15] Les linguistiques distinguent « langue » et « langage ». Le langage est l'ensemble « de caractères, de mots et de symboles écrits ou graphiques, verbaux ou gestuels, qui s'assemblent selon des règles dans le but de communiquer des informations » (Legendre, 1993, p. 773). Le langage a donc un caractère de généralité. La langue est, quant à lui, plus spécifique et constitue « l'assemblage selon des règles » précédemment cité. Plus spécifiquement, la langue est le « système de signes arbitraires et articulés, combinés les uns aux autres selon les règles d'une syntaxe, par le biais duquel les membres d'une communauté se représente le réel et communiquent entre eux » (Legendre, 1993, p. 783).

[16] On pourrait penser ici à l'enseignant qui compte de 1 à 10 en montrant simultanément à ses élèves les gestes qu'il fait avec ses doigts.

3. Le découpage de l'énoncé en unités syntaxiques en appliquant les règles syntaxiques connues dans la mémoire longue;
4. La décomposition des unités syntaxiques obtenues en unités morphologiques et lexicales en appliquant les règles morphologiques et lexicales de la mémoire longue aux unités;
5. Identification du sens des unités obtenues en comparant la mémoire courte et la mémoire longue;
6. Trouver le sens total de l'énoncé en joignant tous les résultats obtenus;
7. Évaluer ou juger du sens de l'énoncé : véracité; bon /mauvais; etc.
8. Trouver l'intention de l'auteur de l'énoncé;
9. Décider du traitement de l'information contenue dans l'énoncé (agir, mémoriser, etc.) en tenant compte des fonctions, des formes, des conditions, des facteurs et des implications de la communication langagière.

Pour l'auteur, la communication ne se réduit pas à ce que l'on entend ou lit, mais elle contient une dimension plus intériorisée où un individu décode les messages qui lui sont envoyés. Toutes les étapes précédentes semblent reprises, en quelque sorte, par la composante ministérielle développée plus tôt (voir la **section 1.3.1.1** sur la compétence à communiquer.

Les modes actifs (écrire et parler) décrits par Bibeau sont pris en compte dans les autres composantes de la compétence à communiquer (en mathématiques) formulées par le Ministère, soit la production et la transmission d'un message. On pourrait parler de la partie plus visible ou sonore de la communication. Ainsi, selon Bibeau, parler ou écrire, c'est :

1. Avoir une intention de communication;
2. Trouver les éléments de sens d'une proposition verbale pour traduire l'intention en mémoire longue;
3. Fabriquer la proposition tant syntaxiquement, lexicalement et morphologiquement;
4. Disposer les éléments de la proposition (ou de l'énoncé) mentalement de façon linéaire;
5. Coder la proposition phonologiquement en mémoire longue;
6. Émettre l'énoncé phonétiquement en ondes sonores ou en formes écrites.

Bien que Bibeau n'en fasse pas mention, on pourrait aussi considérer que le mode actif comprend la communication qui passe par le corps. Elle est alors non verbale ou plutôt non verbalisée, que ce soit par la parole ou l'écriture. La communication non verbale est une communication basée sur la compréhension implicite de signes non exprimés par un langage. Kibler et al. (1970) divisent ce type de communication en deux grandes catégories : les mimiques et les gestes ou expressions corporelles. Pour Kibler et al., les mimiques sont relatives au visage : la bouche et les yeux qui sont communicateurs de messages (sourire, moue, etc.). Les gestes et expressions corporelles se rapportent aux mouvements du corps : usage des mains pour pointer dans une direction; miner l'élan d'un joueur de golf, etc. La compréhension et l'interprétation des signes non verbaux sont dépendants de la culture[17]. La communication non verbale aussi peut être para-verbale, c'est-à-dire accompagnée de vocalisation. Par exemple, si un policier pointe vers la gauche en « Allez dans cette direction », on parlera lors de communication para verbale.

Que ce soit par la communication verbale ou non verbale, des conditions sont nécessaires pour que s'exerce une communication. Selon Bibeau (1982), « pour qu'il y ait communication, s'imposent des conditions minimales sine qua non : une intention, un interlocuteur, une situation (spatio-temporelle), un contexte (linguistique), un code (une langue), un message ou une interaction verbale explicite ou implicite » (rapporté dans Legendre 1993, p. 218). Il est pertinent de préciser que l'interlocuteur peut être à la fois un autre individu, mais aussi le locuteur (celui qui s'exprime) lui-même.

À cet égard, pour Nelson (1988) et Wertsch (1993, 1998), « la communication sociale est reconstruite comme un parler interne, c'est-à-dire que chaque protagoniste interprète les activités de ses interlocuteurs conformément à son système cognitif en donnant lieu à de multiples significations subjectives. Le caractère interactif résulte de la connexion avec les significations subjectives de chaque interlocuteur » (propos rapportés dans Cuadrado et Fernandez, 2007, p. 83).

Ainsi, un locuteur peut être en interaction avec un interlocuteur, avec lui-même, mais aussi, comme nous le verrons plus loin, avec un milieu, au sens de Brousseau.

Les propos précédents conduisent à distinguer les concepts d'interaction et de communication. L'interaction est « un échange interhumain où deux ou plusieurs intervenants s'influencent mutuellement par leur apport au groupe, par le dialogue, par l'approbation ou la contradiction, etc. » (Legendre, 1993, p. 747).

Selon Odier-Guedj (2019), dans la perspective d'interactions de type social, on ne parle plus[18]:

- « d'émetteur et de récepteur, mais de <u>locuteur et d'allocutaire</u> pour signifier leur présence <u>active</u> tout au long de l'échange;
- de message unidirectionnel, mais de <u>boucle d'interaction</u>. La structure des échanges se base sur plusieurs tours de parole. On parlera de maintenir l'interaction : un locuteur initie, l'autre répond, puis renvoie du sens à partager pour continuer à échanger, jusqu'à ce que le thème soit épuisé ou renvoie à un nouveau thème […];
- d'un code unique et partagé, mais de <u>codes multiples co-construits durant l'échange</u>, d'indices à saisir dans le contexte social et interpersonnel pour interpréter le sens;
- de communication, mais d'interaction pour y introduire <u>l'aspect social et interprétatif »</u> (citation extraite d'un article en ligne non paginé[19]).

[17] Par exemple, le clin d'œil pourrait être interprété dans une culture comme un signe d'approbation, de complicité alors que, pour une autre culture, il pourrait s'agir d'un geste de séduction.
[18] C'est nous qui soulignons certains passages de la citation.
[19] Odier-Guedj, D., [Qu'est-ce que l'interaction ?]

En complémentarité avec le concept de communication, l'interaction est donc « l'ensemble du cadre de co-construction de sens entre deux personnes qui échangent » (Odier-Guedj, 2019). Dans l'enseignement, ce concept peut aussi s'élargir à plusieurs actants, pas seulement une dyade, par exemple lorsqu'un enseignant interagit avec un groupe d'élèves pour construire collectivement un savoir.

Au cœur de cette définition se trouve l'idée d'un échange « interactif entre humains », mais on n'y retrouve pas la dimension d'interaction « plus matérielle ». Legendre réfère alors au concept « d'interactivité » (Michaud et Michaud, 1986 rapportés dans Legendre, 1993) pour définir « un échange d'actions réciproques qui se développent entre des éléments qui peuvent être de nature humaine ou purement matérielle » (p. 748).

Dans la perspective des interactions sociales, les protagonistes qui échangent sont actifs de manière quasi-simultanée. Ils se relancent l'un l'autre de manière à interpréter et, éventuellement, à construire le sens d'une idée ou, pour les mathématiques, d'un concept, d'une stratégie, d'un savoir, etc. Dans cette thèse, nous concevons les interactions comme des échanges bidirectionnels non seulement lorsque deux personnes interagissent de façon courante, mais aussi lorsqu'un élève reçoit une rétroaction qui n'est pas nécessairement « humaine » en posant des actions sur un milieu. En effet, la rétroaction peut provenir de la réaction du milieu à l'action de l'élève. Prenons l'exemple classique du puzzle de Brousseau (en ligne). Si, après avoir construit des morceaux du casse-tête à agrandir de manière additive, c'est-à-dire en ajoutant la même grandeur sur chacun des côtés, l'élève découpe et tente de reproduire le casse-tête, il reçoit une « rétroaction » directe du milieu : le puzzle ne fonctionne pas. Dans ce cas, les actions de l'élève sur le milieu matériel le conduisent, dans un premier temps, à une stratégie erronée et le relance, dans un deuxième temps, vers la recherche d'une autre stratégie que l'on souhaite être l'usage des proportions dans l'agrandissement du casse-tête. De manière générale, dans les propos qui suivront, le terme « communication » sera utilisé en considérant que celui-ci englobe les interactions. Par contre, lorsque la précision sera utile ou nécessaire au propos, nous parlerons d'interactions.

En résumé, il appert que tant la communication que les interactions sont d'intérêt pour notre étude et qu'elles sont liées. La communication regroupe toutes les actions mises en place pour transmettre des messages de tous types (écrits, oraux, des émotions, des gestes, etc.) entre un émetteur et un récepteur. Elle n'est pas nécessairement simultanée, mais peut-être différée. Pensons à l'enseignant qui demande à ses élèves une résolution de problème qu'il ramasse et corrige. Il remet ensuite par écrit une rétroaction à l'élève qui la reçoit et la décode. Peut alors s'enclencher un processus interactif avec l'enseignant sur la correction.

Pour communiquer ou interagir en classe de mathématiques, il faut qu'il se soit développé un système de codes entre l'enseignant et les élèves, de même qu'entre les élèves ou même pour l'élève lui-même pour ses prises de notes. La section qui suit montre qu'en mathématiques les codes sont riches et complexes à la fois.

## 2.2 La communication en mathématiques

Sfard (2008) soutient que la pensée mathématique est un discours ayant plusieurs caractéristiques: des mots-clés (triangle, fonction, graphes, etc.), des médiateurs visuels (chiffres, symboles algébriques, etc.), des routines distinctives (des manières structurées de réaliser des tâches mathématiques), et des écrits généralement approuvés, c'est-à-dire des théorèmes, des définitions et des règles de calcul (Sfard, 2008). De même, elle mentionne qu'on peut distinguer le discours de l'algèbre, de la géométrie et des fonctions.

Les « individus capables de participer à un discours donné » (Sfard, 2008, p. 299) constituent la communauté du discours. Elle distingue une personne appartenant à cette communauté, un initié, et une « personne incapable de participer au discours » (Ibid., p. 300), un étranger. La distinction et la prise en compte des deux perspectives peuvent enrichir l'analyse du discours en question. Selon Sfard, « ce qui est insensé ou inexplicable aux yeux de l'initié peut devenir significatif pour un étranger, ne serait-ce que parce que, du point de vue de l'étranger, les règles du discours en question ont des alternatives » (Ibid., p. 279).

Selon Sfard la communication du sens mathématique ne consiste pas à seulement échanger des informations, mais repose sur la co-construction d'informations et de connaissances. Par conséquent, elle serait donc intimement liée à l'interaction comme il a été vu précédemment.

### *2.2.1 La complexité et la variété des différents modes d'expression dans la classe de mathématiques*

Dans le contexte de la classe de mathématiques, le discours de l'enseignant fait appel à des modes d'expression variés, nombreux et complexes, puisqu'ils sont à la fois explicites et implicites. Certes, il y a les symboles et les formules mathématiques, lesquels sont institutionnalisés, mais il y a aussi, par exemple, le langage imagé utilisé[20] par l'enseignant pour expliquer certains concepts, ainsi que le langage gestuel[21]. De même, Vergnaud (2001) relie la pensée mathématique au geste, dans la mesure où des gestes sont effectifs dans certains schèmes mathématiques (il cite l'exemple d'un jeune enfant qui pointe des objets alors qu'il les dénombre).

Pirie (1998, p. 8) a divisé en six grandes catégories le langage utilisé en classe de mathématiques[22]:

> **« <u>Ordinary language</u>:** the language current in the everyday vocabulary of any particular child (varying for students of different ages and stages of understanding)[23].

[20] Par exemple, un enseignant qui dit qu'une fonction « monte » pour dire qu'elle est croissante.
[21] À cet effet, Pimm (rapporté dans Sierpinska, 1995, p. 66) donne l'exemple de l'enseignant qui utilise ses mains pour mimer les crochets, etc.
[22] Nous avons tenté une exemplification pour chacun de ces types de langages en note de bas de page.
[23] Par exemple, pensons à l'élève qui utilise le terme « rond » pour parler d'un « cercle ».

**Mathematical verbal language:** "using words", either spoken or written[24].

**Symbolic language:** mathematical symbols.

**Visual representation:** not strictly a "language", but a powerful means of mathematical communication[25].

**Unspoken but shared assumptions:** not strictly a "language"; means by which mathematical understanding is communicated and on which new understanding is created[26].

**Quasi-mathematical language:** this language, usually, but not exclusively, that of the pupils, has, for them, a mathematical significance not always evident to an outsider (even the teacher)[27] ».

D'autres auteurs, notamment Matheron et Mercier (2005) font appel à des éléments de communication dans la description de l'activité mathématique montrant, par-là, que la communication est inévitable dans cette activité et qu'elle revêt aussi une certaine complexité. Selon eux, l'activité mathématique se caractérise « par la manipulation des objets pratiques (ou ostensifs) et cognitifs (ou non ostensifs) » (2005, p. 356). Les auteurs déclinent plusieurs types d'ostensifs, notamment les matériaux concrets pour faire des mathématiques (crayon, équerre, etc.), mais également d'autres types d'ostensifs qui rejoignent la catégorisation de Pirie que nous venons de décrire : les gestes, les mots et le discours, les schémas et les formalismes. Ainsi, précisent-ils:

« On appelle ostensifs les objets qui ont […] une forme matérielle, sensible, au demeurant quelconque. Un objet matériel (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif. Mais il en va de même :

- des gestes : nous parlerons d'ostensifs gestuels;
- des mots et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs discursifs (ou langagiers);
- des schémas, dessins, graphismes : on parlera, dans ce cas, d'ostensifs graphiques;
- des écritures et formalismes : nous parlerons alors d'ostensifs scripturaux » (2005, p. 356).

[24] On comprend ici par le terme « verbal » tout ce qui se rapporte à « l'utilisation des mots » que ce soit de manière parlée ou écrite.

[25] Il s'agit en fait de tout ce qu'un actant est appelé à lire, à décoder en mathématiques. L'auteure précise que cette dimension est un langage important. Les tableaux et les graphiques en sont des exemples. Nous comprenons aussi que le registre des mots en fait partie.

[26] Il s'agit en fait d'apprentissages mathématiques qui ont été communiqués et sur lesquels on construit de nouveaux apprentissages. Pensons ici aux « propriétés des opérations » (commutativité, associativité, etc.) que peu d'élèves nomment, mais que plusieurs sont capables d'utiliser.

[27] Ce langage regroupe tous les éléments qui ont un sens mathématique pour les élèves, mais pas nécessairement pour une personne extérieure (qui peut aussi être l'enseignant). Selon notre compréhension, on pourrait donner en exemple les « rayures » utilisées par les élèves pour simplifier des termes ou des facteurs dans une équation, ou pour signaler un emprunt dans une soustraction, ou bien des « flèches », de part et d'autre, d'une équation pour laisser sous-entendre une équivalence.

Le propre des ostensifs, c’est de pouvoir être manipulés, ce mot étant entendu au sens large : manipulation au sens strict, certes, (celle du compas ou du stylo, par exemple), mais aussi par la voix, le regard, etc. (Matheron et Mercier, 2005, p. 356).

Des parallèles se dessinent entre les catégorisations de Pirie (1998) et de Matheron et Mercier (2005). Soulignons, notamment, le langage mathématique verbal de Pirie qui s’apparente aux ostensifs discursifs; le langage symbolique qui se rapporte aux ostensifs scripturaux; et les représentations visuelles qui sont liées aux ostensifs graphiques.

Il est aussi intéressant de constater que plusieurs auteurs reconnaissent l’importance des gestes dans l’enseignement des mathématiques : Pimm (1995) en fait une catégorie (langage gestuel); Vergnaud (2001) introduit les gestes dans sa définition de schème; Matheron et Mercier (2005) en ont fait une catégorie par les ostensifs gestuels.

Plusieurs recherches ont étudié la gestuelle de l’enseignant en contexte de classe (Forest, 2006; Radford, 2008; Timmermans et Rubie-Davies, 2018). Forest (2006) s’est intéressée aux modalités non verbales d’échange de significations entre le professeur et les élèves dans une approche qu’elle qualifie de « didactique proxémique » en se référant à la catégorisation de Hall[28]. Le geste de l’enseignant est ici considéré notamment comme la distance physique qui le sépare de l’élève. Forest suggère que les échanges jouent un rôle non négligeable dans la qualité et l’efficacité de la relation didactique. Elle analyse comment les techniques du corps de l’enseignant lui permettent d’assumer une part importante de la relation didactique.

Radford (2008), inspiré des travaux Gehlen (1988) sur la « cognition sensorielle », s’est intéressé à la gestuelle de l’enseignant en classe. À partir d’une classe ontarienne de 10e année, il montre que la pensée ne se fait pas uniquement dans la tête, mais aussi dans et par une coordination sémiotique sophistiquée de la parole, du corps, des gestes, des symboles et des outils.

En Nouvelle-Zélande, Timmermans, A. C., et Rubie-Davies (2018) ont montré que des enfants sont en mesure d’identifier, par les réactions non verbales d’un enseignant, le niveau d’attente (élevé ou faible) de cet enseignant à l’égard de ses élèves. Dans des extraits vidéo sur lesquels ils ont filmé des enseignants qui interagissent avec des enfants forts et faibles, les enfants étaient en mesure d’identifier à quel type d’élèves s’adressait l’enseignant, même sans entendre les paroles, juste avec son attitude non verbale.

[28] « Proxemic behavior can be seen as a function of height different “dimensions”, with their appropriate scales. Complex as proxemic behavior is in the aggregate, by proceeding one a time, these dimensions can be recorded quickly and simply in the following order : 1. Postural-sex identifiers. 2. Sociofugalsociopetal orientation (SFP axis). 3. Kinesthetic factors. 4. Touch code. 5. Retinal combinations. 6. Thermal code. 7. Olfaction code. 8. Voice loudness scale » (Hall 1963, p. 1006-1007 rapporté dans Forest, 2006, p. 76).

Dans une recherche portant sur des élèves de l'enseignement spécialisé, Dias montre que « la sollicitation du geste et la variation des registres de représentations des objets géométriques sont susceptibles de révéler les connaissances et les aptitudes des élèves parfois trop rapidement catégorisés en difficulté » (Dias, 2014, p. 151). L'idée de son expérimentation consistait à élaborer des situations d'expérimentation en géométrie en vue d'un processus de communication des découvertes, des constructions et des acquisitions de connaissances des élèves. La recherche de Dias (2014) met ainsi en évidence l'importance des registres de représentation pour la communication en mathématiques pour le domaine de la géométrie.

Le concept des registres de représentations en mathématiques a aussi été travaillé par Duval (1991; 1993; 1995; 2000). Pour ce chercheur, en mathématiques, les objets ne sont accessibles qu'à travers des représentations sémiotiques. Il est donc important d'analyser le rôle que jouent les représentations dans la construction de la connaissance mathématique. Pour communiquer en mathématiques, on manipule plusieurs types de registres (écritures algébriques, graphiques cartésiens, langage naturel, figures géométriques, etc.) qu'il appelle des représentations sémiotiques. Pour Duval, « des représentations sémiotiques sont des productions constituées de signes appartenant à un système de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement » (Duval, 1991, p. 39).

Duval met en garde de considérer les représentations sémiotiques comme un simple moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication afin de les rendre visibles ou accessibles à autrui. « Les représentations ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée » (Duval, 1991, p. 39). En effet, toujours selon Duval, les représentations sémiotiques jouent un rôle dans:

- « <u>le développement des représentations mentales</u>: celui-ci dépend d'une intériorisation des représentations sémiotiques, au même titre que les images mentales sont une intériorisation des percepts (Vygotsky, 1997, Piaget, 1968);

- <u>l'accomplissement de différentes fonctions cognitives</u>: la fonction d'objectivation (expression privée) qui est indépendante de celle de communication (expression pour autrui), et la fonction de traitement qui ne peut pas être remplie par les représentations mentales (certaines activités de traitement sont directement liées à l'utilisation de systèmes sémiotiques, par exemple le calcul);

- <u>la production des connaissances</u>: les représentations sémiotiques permettent des représentations radicalement différentes d'un même objet dans la mesure où elles peuvent relever de systèmes sémiotiques totalement différents (Benveniste 1974, Bresson 1987). Ainsi le développement des sciences est lié à un développement de systèmes sémiotiques de plus en plus spécifiques et indépendants du langage naturel (Granger 1979) » (Duval, 1991, p. 39).

Les registres de représentations sémiotiques permettent trois activités cognitives liées à la production des représentations sémiotiques. D'une part, la *formation* d'une représentation conforme à des lois de formation de ces signes propres au registre et identifiable (Hitt, 2006). D'autre part, le *traitement* d'une représentation (interne à chaque registre) en lien avec des règles de traitement propres au registre[29]. Enfin, la *conversion* d'une représentation du registre dans un autre (une transformation externe à ce registre qui suit d'autres règles).

Pour Duval, les représentations externes jouent un rôle fondamental dans l'apprentissage, car les représentations mentales sont très souvent des représentations externes qui ont été intériorisées, et la coordination de registres sémiotiques est une condition nécessaire à la compréhension, d'où l'importance, pour la compréhension mathématique, de disposer de plusieurs représentations sémiotiques. En effet, pour Duval, la coordination des registres de représentation se manifeste, entre autres, par la capacité de reconnaître dans au moins deux représentations d'un même objet (par exemple, les représentations graphique et algébrique d'une fonction). Cette coordination n'est pas spontanée. Pour l'élève, convertir une représentation d'un registre en la représentation correspondante dans un autre registre peut susciter de grandes difficultés. Ces difficultés de conversion sont souvent sous-estimées dans l'enseignement (Duval, 1991) et il y a une nécessité de développer des activités spécifiques visant à développer chez les élèves une différenciation des registres, nécessaire à la fois pour réussir des tâches mathématiques, mais aussi pour que les démarches qui sont produites à des fins de communication acquièrent du sens pour les élèves.

Hitt (2006) apporte quelques nuances aux conclusions de Duval :

> « En premier lieu, nous pensons qu'une trop grande importance est donnée, implicitement, aux représentations officielles (celles qu'utilisent les enseignants et celles que nous trouvons dans les manuels) et que, par conséquent, les représentations sémiotiques des élèves lors de la résolution d'un problème et lors de la construction des concepts mathématiques n'ont pas, implicitement, l'importance qu'elles devraient avoir. En deuxième lieu, Duval met de côté les constructions intermédiaires et les conceptions qui jouent un rôle quelquefois d'aide et quelquefois d'obstacle pour la construction d'un concept mathématique » (Hitt, 1998b, 2003, propos rapportés dans Hitt, 2006, p. 337).

Nous venons de voir que, dans la classe de mathématiques, il n'existe pas un mode d'expression unique, mais bien une multitude de moyens de communication entre l'enseignant et les élèves. Et, les représentations faites par les élèves pour communiquer et pour s'approprier les concepts mathématiques sont fondamentales puisque la construction d'un concept se fait lorsqu'il y a une coordination, sans contradiction, entre différentes représentations de l'objet mathématique.

[29] Duval (1993), précise que « le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée » (p.41 rapporté dans Hitt, 2006, p. 335).

Chacun des moyens de communication utilisés en classe possède ses propres conventions, parfois explicites, parfois non, ce qui peut être une source de difficulté pour l'élève qui cherche à comprendre ce que son enseignant attend de lui et aussi ce qu'il tente de lui apprendre. Aussi, pour l'enseignant, il peut être difficile de saisir ce que l'élève tente de lui dire.

L'enseignant doit alors favoriser la mise en place de moments d'interaction réguliers et fréquents pour réguler son enseignement et mieux cerner ce que les élèves comprennent. Pour ce faire, il lui faut des outils qui permettent une réelle interaction avec les élèves et non seulement une communication unidirectionnelle (de l'enseignant vers l'élève) du savoir, de type « *voici ce qu'il faut faire* ».

La prochaine section se consacre à une revue de littérature à propos des apports potentiels de la communication en mathématiques, tant pour l'enseignement que pour l'apprentissage. Les conclusions des recherches soulignent l'importance de l'exploitation de la communication orale et écrite en classe de mathématiques. De tels résultats viennent soutenir le choix, fait par les programmes de formation, de maintenir un intérêt pour la communication. L'importance d'une recherche sur la communication en classe de mathématiques en sera ainsi réaffirmée.

## 2.3 Les apports de la communication en classe de mathématiques

### *2.3.1 Des apports de la communication écrite*

Rauscher (2006, p. 2), en référant à Vygotski, met en relief la différence entre la communication orale et la communication écrite au regard de la prise de conscience de celui qui communique. L'exigence de communiquer par écrit demande une réorganisation de la part de celui qui communique et participe de manière privilégiée à la prise de conscience et à la conceptualisation:

> « Vygotski (1934/1997) a été l'un des premiers à attirer l'attention sur les différences cognitives entre l'activité d'expression orale qu'il n'hésitait pas à qualifier d'automatique et l'activité d'expression écrite qui exige une véritable prise de conscience et une réorganisation de la part de celui qui écrit par rapport à ce dont il peut avoir conscience en s'en tenant à la seule communication orale. Sous ce point de vue, l'écriture comme activité spécifique d'expression devient un moment essentiel dans la « conceptualisation » » (Rauscher, 2006, p. 2).

Dans la communication orale, et plus particulièrement dans l'interaction orale, nous laissons la charge à autrui de reconstituer, à partir de brides d'énoncés ou d'énoncés complets, le sens des messages que nous envoyons (Vergnaud, 1998; Giroux, 2004). À l'oral, tout n'est pas dit et il y a place à interprétation, soit à partir des énoncés formulés ou même aussi à partir d'éléments verbaux ou gestuels qui sont décodés de part et d'autre au cours de l'interaction.

À l'écrit, l'élève doit être plus précis dans ses propos pour bien se faire comprendre puisque son interlocuteur n'est pas directement devant lui (dans le cas de la classe, les propos passent généralement par la production d'un écrit de l'élève vers l'enseignant). La communication écrite a un caractère plus exigeant et elle favorise une construction des savoirs puisqu'elle force, d'une certaine façon, l'élève à organiser sa pensée, à mieux articuler ses pas de raisonnements et, éventuellement, à prendre conscience de ses connaissances (Conne, 1999). Lorsque les élèves s'engagent dans des activités écrites, ils avancent dans leur cheminement réflexif, synthétisent leurs idées et, à partir des processus qu'ils mobilisent, tentent de se convaincre avant de convaincre autrui. Ils doivent être le plus précis possible pour être bien compris et s'assurer d'une adéquation de leur pensée avec celle de leur interlocuteur. On peut y voir des parallèles avec l'activité du mathématicien.

Rauscher constate aussi que faire écrire les élèves en classe de mathématiques leur permet de dépasser le stade de l'action (des calculs pour soi, des écrits plus brouillons, des essais, etc.) pour graduellement entrer dans une activité de validation des connaissances (dont le but est de communiquer à autrui les savoirs mobilisés par soi). Les élèves sont plus à même de décontextualiser les savoirs en jeu dans les situations proposées et d'en comprendre le caractère plus général. La citation suivante résume ces idées :

> « Les écrits produits permettent aux élèves de prendre conscience et d'exprimer leur degré d'engagement, de certitudes, de doutes, de questionnement par rapport aux énoncés qu'ils avancent. L'écriture apparaît alors comme étayant une marche vers les processus de validation en classe et vers la décontextualisation des savoirs dans la communauté constituée par la classe. » (Rauscher, 2006, p. 5)

Dans le même esprit, Duval propose que « pour l'apprentissage des mathématiques, il est crucial de passer à une production écrite qui utilise les possibilités cognitives spécifiques d'organisation et de contrôle qu'offre la représentation visuelle du discours » (2000, p. 35). Il réitère donc que le discours écrit sollicite des habiletés cognitives spécifiques à l'organisation et au contrôle de la pensée rejoignant les propos de Vygotski puis de Rauscher quant à la réorganisation de celui qui écrit.

D'autres recherches montrent aussi l'apport des activités de communication écrite, notamment pour amener les élèves à développer le recours au formalisme, dans un contexte de collaboration entre élèves. En effet, Schubauer-Leoni et Perret-Clermont (1980) ont montré[30] que, mises ensemble, la collaboration (entre deux élèves) pour rédiger le message et la communication à un pair (pour décoder le message), favorisent le recours plus fréquent et de meilleure qualité au formalisme tout en rendant plus explicites les formulations des élèves.

Un autre apport, signalé par Blum et Niss (1991), est d'engager les élèves dans des activités de rédaction de problème ce qui redonne, d'une certaine façon, le contrôle aux élèves qui prennent en charge les problèmes et leur résolution. Pour ces auteurs, la rédaction de problèmes par les élèves eux-mêmes peut

[30] En faisant formuler à des élèves genevois, en deuxième année du primaire, des messages écrits expliquant comment ils ont constitué des bouquets de fleurs.

aider les jeunes à devenir de bons solutionneurs, en les préparant à devenir des utilisateurs intelligents des mathématiques, parce que les problèmes utilisés sont à leur portée, sont réfléchis, et tiennent compte de leurs intérêts.

D'autres résultats de recherches liés à l'usage de l'importance de l'écriture dans l'apprentissage des mathématiques sont présentées dans un rapport produit pour le compte du Superintendent of Public Instruction aux États-Unis (Bergeson et al., 2000) dont voici un extrait. Nous y avons souligné les passages qui montrent des apports à engager les élèves dans des activités d'écriture en mathématiques.

> « "Students writing in a mathematical context helps improve their mathematical understanding because it promotes reflection, clarifies their thinking, and provides a product that can initiate group discourse"(Rose, 1989);
>
> "[…] writing about mathematics helps students connect different representations of new ideas in mathematics, which subsequently leads to both a deeper understanding and improved use of these ideas in problem solving situations" (Borasi and Rose, 1989; Hiebert and Carpenter, 1992)
>
> "Students writing regularly in journals about their learning of mathematics do construct meaning and connections as they increasingly interpret mathematics in personal terms. The writing sequence that students adopt first is the simple narrative listing of learning events, then progress to personal and more reflective summaries of their mathematics activity, and finally for a few students, create "an internal dialogue where they pose questions and hypotheses" about mathematics" (Clarke et al., 1992) » (rapporté dans Bergeson et al., 2000, p. 34)

La communication écrite améliorerait donc la compréhension de l'élève, elle lui permettrait de saisir davantage les liens entre différentes représentations et pourrait, ainsi, l'amener à être un meilleur résolveur de problèmes. Enfin, communiquer par écrit permettrait à l'élève d'approfondir ses représentations personnelles des mathématiques et d'avoir une réflexion plus profonde dans ses résolutions ou ses résumés, ces constats faisant écho aux recherches de Duval (1991; 1993; 1995; 2000) et Hitt (2006).

La communication écrite semble aussi avoir un apport positif sur le sens attribué par des élèves au symbolisme algébrique. En effet, affirmant que l'algèbre est souvent introduite à l'élève en imposant la maîtrise d'un langage symbolique complexe qui peut parfois être dénué de sens, Radford et Grenier (1996) ont proposé un dispositif structuré comportant une gradation de situations (allant d'un niveau concret (avec du matériel de manipulation), au semi-concret (en manipulant des dessins par exemple), puis au niveau symbolique) pour introduire l'algèbre chez des élèves de 3e secondaire. Les élèves étaient invités à rédiger leur raisonnement et les chercheurs en analysant ensuite les productions de deux groupes d'élèves ont montré que « ces derniers arrivent à construire les idées algébriques de base dans un contexte de résolution de problèmes et à symboliser ces idées » (Grenier et Radford, 1996, p. 253).

Plus précisément, les auteurs ont notamment:

- constaté qu'aux niveaux concret et semi-concret de leurs situations, l'utilisation des règles algébriques de base par les élèves semblait se faire assez facilement;
- montré qu'en « revanche, au niveau du symbolisme, cela posait des problèmes à certains élèves. L'utilisation de ces règles, dans un contexte symbolique, demande un contrôle supplémentaire qui ne va pas de soi » (Ibid., p. 273).

De nombreux avantages à faire communiquer par écrit les élèves en classe, et ce, sous diverses formes telles que par un journal, la rédaction de problèmes, etc., ont été mis en évidence. Nous verrons maintenant qu'il y en a également à travailler la communication orale avec les élèves.

*2.3.2 Des apports de la communication orale*

Pour Bakhtine (1968), qui traite du langage dans une perspective psychologique, la « véritable pensée » de l'être humain, qu'il appelle une idée, se développe seulement en lien avec d'autres pensées dans un dialogue. L'idée prend sa forme et elle peut se développer par l'expression verbale et c'est justement par cette verbalisation que se réalisent les conditions de contact avec les autres idées. L'idée que la pensée humaine se développe par confrontation est une des notions les plus importantes de la théorie de Bakhtine.

En didactique des mathématiques, cette idée est reprise, notamment par Bednarz (1996), Brousseau (1998) et Bruce (2007). Ces auteurs voient plusieurs apports à faire communiquer oralement les élèves et à mener des activités où ils interagissent entre eux.

Bednarz (1996) rappelle que les mathématiques telles que vécues à l'école sont une activité à fort caractère social et régies par un contrat didactique (Brousseau, 1986; 1990; 1998) unissant différents acteurs, chacun ayant des attentes et des interprétations différentes par rapport à l'enseignement. Le projet d'enseignement nécessite donc des interactions (orales et écrites) entre l'enseignant et ses élèves, et, très certainement, des interactions entre élèves (Bednarz, 1996). Les interactions produites permettent à tous et chacun, et notamment à l'enseignant, de mieux saisir ce que comprennent les élèves.

Les recherches de Bruce (2007) montrent que les pratiques d'enseignement axées sur l'interaction des élèves améliorent les aptitudes à la résolution de problèmes et la compréhension des concepts sans toutefois négliger les calculs mathématiques de base. La chercheure ajoute que les résultats sont encore plus remarquables lorsque les élèves partagent leurs raisonnements.

Une recherche en didactique de la physique (Goffard et Goffard, 2003) sur les apports de la communication, à la fois écrite et orale, a attiré notre attention. Les chercheurs ont cherché à savoir si des élèves, placés dans une situation de travail entre pairs, parviendraient ou non à analyser une situation en physique et à construire une représentation du problème posé. Ils ont ainsi analysé quatre séances de résolution en s'intéressant aux moyens que les élèves élaborent pour communiquer, ainsi qu'au rôle de la tâche proposée aux élèves sur leurs raisonnements. Les chercheurs ont noté un écart entre les écrits des élèves et leurs prises de parole en classe constatant que « tout ne peut être verbalisé [...] » (Goffard et Goffard, 2003, p. 174).

Aussi, les auteurs mettent en évidence l'influence du type de problème proposé, ouvert ou plus fermé, sur le discours des élèves. Les problèmes de types ouverts offrent à l'enseignant un accès aux raisonnements des élèves ce qui n'est pas le cas pour les problèmes plus fermés. Ils expliquent:

> « ...lorsque le problème est fermé on peut constater qu'ils [les élèves] recherchent essentiellement des formules (ou des théorèmes) à appliquer [...], lorsque la situation problème est ouverte, qualitative, le recours à la formule n'est pas possible; les élèves cherchent à exprimer ce qu'ils pensent, leur manière de comprendre la situation ou les contradictions qu'ils perçoivent entre la physique qu'ils apprennent et celle de leur expérience; «...les échanges ne portent pas de manière égale, dans les quatre groupes, sur leurs raisonnements. S'il est possible de les connaître dans des situations ouvertes, ils sont moins accessibles lorsque le problème est fermé mais on peut dire que, même si le savoir du livre ou celui du professeur font autorité, ils sont en partie inopérants et restent à construire par les élèves » (Ibid., p. 180 à 182).

L'analyse de la communication orale et écrite produite par les élèves sujets de cette recherche montre, d'une part, l'écart entre le discours oral et écrit, le dernier étant plus exigeant, rejoignant ainsi les propos de Rauscher en ouverture de la section 2.3.1. D'autre part, certaines situations de type « ouvert » seraient prometteuses pour mieux apprécier les raisonnements des élèves lesquels sont plus accessibles et donc davantage communiqués dans des situations ouvertes.

Par ailleurs, des travaux sur les *Number Talks* (Parrish 2011; Richardson, 2011 et Boaler, 2015) montrent que ces causeries mathématiques peuvent aider les élèves à acquérir une solide compréhension du sens des nombres et de la maîtrise des mathématiques[31]. En plus de donner aux élèves un moyen de vérifier et de valider leur raisonnement, les causeries mathématiques les aident à développer et à maintenir une grande flexibilité dans leurs réflexions sur les nombres (Parrish, 2011, Richardson, 2011 et Boaler, 2015). Quand les élèves découvrent qu'ils peuvent eux-mêmes construire le sens en mathématiques, convaincre ou critiquer avec des arguments mathématiques et construire à partir du raisonnement de leurs pairs, les mathématiques prennent une nouvelle dimension et deviennent engageantes. Les causeries mathématiques permettent aussi de redonner à la compréhension conceptuelle sa place dans le cheminement d'apprentissage

[31] Très simplement, ces causeries organisées (une première partie d'un dispositif) sont des discussions de 5 à 15 minutes consacrées à des problèmes de calculs porteurs (une deuxième partie d'un dispositif) et dont la résolution se fait mentalement. Les causeries mathématiques sont introduites afin d'amener les élèves à échanger sur leurs stratégies de résolution de calculs mentaux. Pendant environ 15 minutes, souvent en début de période, instauré dans une routine, l'enseignant présente des opérations (et même parfois des suites numériques) sur lesquelles les élèves peuvent échanger sur leurs stratégies de résolution. Afin de s'assurer que ce moment d'échange laisse la place à chaque élève, les chercheurs ont même développé un système de codes et de gestes discrets, à mettre en place avec les élèves (une troisième partie d'un dispositif). Lorsqu'ils résolvent le calcul présenté, ils posent en silence leur main sur leur cœur. Lorsqu'ils sont prêts à donner une stratégie, ils lèvent le pouce. S'ils ont plusieurs stratégies efficaces pour un même problème, ils lèvent le nombre de doigts correspondants à chacune de leurs stratégies.

en mathématiques puisqu'elles mettent en valeur les diverses stratégies des élèves et s'éloignent des algorithmes habituels de calculs. Elles leur permettent de devenir des penseurs plus confiants. Les causeries aident donc les élèves à développer leur sentiment d'efficacité personnelle. Ils deviennent plus volontaires à persévérer en résolution de problème et intéressés à partager et questionner les idées mathématiques (Parrish, 2011, Richardson, 2011 et Boaler, 2015).

D'autres chercheurs soulignent l'importance du conflit cognitif dans l'apprentissage des mathématiques, lequel est rendu possible notamment à travers la délibération et le débat d'idées (Frempong, 2005). Les élèves doivent pouvoir confronter, analyser et évaluer les différentes solutions possibles à un problème afin de trouver la solution la plus adéquate (Waite, 2000).

Les interactions sociales en classe offrent ainsi aux élèves une voie d'accès à la construction des savoirs. Elles représentent également un apport indirect pour l'enseignant puisqu'elles lui permettent à de mieux saisir ce que comprennent ses élèves. Si les interactions peuvent offrir à l'enseignant un accès aux connaissances des élèves sur lesquelles il peut agir, en les validant ou en relançant le débat dans la classe, il n'est pas toujours évident de saisir ces occasions d'interactions et de bien comprendre le sens des connaissances mathématiques qui sont exprimées par les élèves. Comme le met en évidence Bishop:

> "Student communication about mathematics can be successful if it involves both the teacher and other students, which may require negotiation of meanings of the symbols and words at several levels" (Bishop, 1985, rapporté dans Bergeson et al., 2000, p. 34).

Ainsi, en proposant des situations de communication orale aux élèves, l'enseignant cherche à favoriser la construction du sens de certains concepts, termes ou symboles mathématiques. En sollicitant la discussion, la « négociation » ou la « co-construction » du sens, il entre dans une zone d'enseignement qui n'est pas toujours évidente pour lui puisqu'il sera confronté à une émergence d'idées, de stratégies, de conceptions diverses, qu'il doit prendre au vol et parfois relancer dans la collectivité de la classe (« *qu'en pensez-vous ? êtes-vous d'accord ?* », etc.). En effet, un des rôles de l'enseignant est de fournir à l'élève des rétroactions sur son travail. Ces rétroactions peuvent porter directement sur la validité de la production de l'élève (c'est juste ou c'est faux) ou encore renvoyer ce jugement à l'élève.

Dans le premier cas, l'enseignant rétroagit directement sur la validité du travail de l'élève et, dans les cas où ce travail est incorrect, il peut avoir tendance à dire à l'élève ce qu'il aurait fallu faire, à lui fournir simplement ce qu'il lui manque pour réussir le problème, sans nécessairement questionner les raisons pour lesquelles l'élève a produit sa solution. Deux raisons, entre autres, peuvent conduire l'enseignant à donner à l'élève ce qu'il lui manque sans égard aux raisons pour lesquelles il a produit autre chose. D'une part, ce peut être parce que l'enseignant considère qu'il suffit de donner à l'élève les bons outils pour qu'il s'en serve à bon escient, donc donner ce qu'il lui manque (Giroux et René de Cotret, 2001). Dans ce cas, l'enseignant est davantage dans une vision transmissive de l'enseignement. D'autre part, ce peut être parce que l'enseignant n'arrive pas à saisir les raisons ou le raisonnement qui ont conduit l'élève à réaliser sa production et il ne peut donc que s'intéresser à ce qui manque. Dans ce deuxième cas, il serait utile que l'enseignant ait des moyens pour mieux comprendre le raisonnement de l'élève afin d'offrir une rétroaction mieux adaptée à l'état des connaissances de l'élève.

Dans l'autre cas, celui ou on cherche à renvoyer le jugement à l'élève, une autre rétroaction est mise en œuvre. Il s'agira par exemple de repartir de ce que l'élève a fait et de lui soumettre une question qui le conduira non pas à produire le bon résultat, mais à s'apercevoir que ce qu'il a produit est incorrect (dans ce cas, la responsabilité du jugement de validité est dévolue à l'élève alors en situation a-didactique (Brousseau, 1998)). Puis, une fois ce constat fait, la rétroaction de l'enseignant visera par exemple à ce que l'élève comprenne les raisons pour lesquelles ce qu'il a fait ne convient pas et, enfin, à développer une façon de faire plus appropriée. Ce type de rétroaction nécessite toutefois que l'enseignant puisse saisir les raisons qui sous-tendent la production de l'élève. Et c'est là que le travail d'interaction et de communication apparaît utile non seulement pour l'activité mathématique de l'élève, mais aussi pour l'identification par l'enseignant du raisonnement de l'élève. Et cette identification pourra alimenter la rétroaction de l'enseignant et, plus généralement, les interactions didactiques en classe.

Par ailleurs, lorsque l'élève fait une erreur dans son raisonnement, l'enseignant peut s'emparer de celle-ci pour rectifier le sens des connaissances de l'élève. Devant les demandes de l'enseignant pour préciser son raisonnement, l'élève tente parfois plutôt de trouver une nouvelle solution. « En ce sens, l'élève cherche à corriger l'erreur et l'enseignant à y remédier » (Giroux, 2004, p. 311). Pour l'enseignant, la remédiation vise un « apprentissage par adaptation » (Ibid.) qui cherche le rejet par l'élève de la connaissance erronée, alors que l'élève, lui, cherche à substituer sa réponse étant confronté au questionnement de son enseignant. Et cette substitution, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, peut être motivée par l'effet du contrat didactique (l'élève veut plaire à son enseignant) et non pas parce qu'il saisit en quoi sa connaissance est erronée.

Devant une erreur, les échanges, enseignant-élève, via le questionnement ou d'autres types d'interactions, peuvent s'avérer féconds dans la mesure où ils deviennent « un moteur de recherche pour trouver une nouvelle solution » (Giroux, 2004, p. 312).

> « Ainsi, l'erreur offre une occasion d'adapter l'enseignement non pas aux besoins particuliers de l'élève mais à son activité cognitive. L'enseignant espère qu'étant invité à justifier, à expliquer la réponse erronée, l'élève confrontera le rapport qu'il entretient avec la connaissance, source de l'erreur relevée » (Giroux, 2004, p. 312).

Dans ce contexte, les interactions entre les acteurs de la classe autour des erreurs des élèves deviennent un apport dans la mesure où elles sont utilisées par l'enseignant comme une occasion de transformer l'erreur. Elles deviennent des leviers pour favoriser l'apprentissage des élèves, c'est-à-dire les amener à réaliser que ce qu'ils faisaient n'était pas adéquat, du moins dans un contexte donné. Cela participe donc à l'enrichissement du bagage de connaissances de l'élève.

Ayant le souci de développer un dispositif à mettre à la disposition des enseignants dans la mise en place d'activités de communication en classe, il appert pertinent de synthétiser nos idées quant à la communication mathématique : quelles en sont ses fonctions (on communique pour quoi ?) ? quels en sont ses apports/avantages ? À partir des recherches explorées jusqu'à maintenant et des programmes de formation nationaux et internationaux parcourus dans la problématique, nous résumerons dans la prochaine section différents éléments de la communication sous formes de tableaux. Les éléments que contiennent ces tableaux viendront nécessairement organiser le dispositif à mettre en place qui vise à solliciter une communication riche au sein de l'activité mathématique.

#### *2.3.3 Résumé des fonctions et des apports de la communication et des interactions*

Le tableau 1 rassemble toutes les fonctions et les apports de la communication en mathématiques abordés jusqu'à présent, lesquels sont appuyés par des références théoriques.

Dans le tableau 2, ce sont les recherches qui abordent explicitement l'idée des interactions qui sont synthétisées.

*Tableau 1 - Synthèse des apports et des fonctions de la communication en mathématiques*

| Apports et fonctions de la communication | Références |
|---|---|
| **La communication permet de clarifier et structurer la pensée**<br>- *L'exigence de communiquer par écrit demande une réorganisation de la part de celui qui communique, et participerait de manière privilégiée à la prise de conscience et à la conceptualisation.*<br>- *La communication amène l'élève à respecter certaines des exigences telles que savoir établir un plan de communication et permet de pouvoir représenter des travaux sous la forme qui les valorise mieux, de façon claire et concise, et à les rendre utilisables par d'autres (revue de littérature des différents programmes)* | Rauscher (2006); MÉLS (2003); Revue de littérature de différents programmes de formation. |
| **La communication (sous toutes ses formes) joue un rôle dans la construction des savoirs mathématiques**<br>- *Elle permet d'apprendre des concepts et des processus ou encore de renforcer ses apprentissages*<br>- *Elle amène l'élève à structurer ou organiser ses idées en exploitant et en intégrant un ensemble de savoirs et leurs interrelations*<br>- *Elle permet de favoriser une meilleure compréhension des concepts et processus qui seront mieux réinvestis en résolution de problèmes*<br>- *Elle permet d'établir des liens entre certains savoirs, concepts et représentations mathématiques; d'expliciter des liens entre savoirs conceptuels et procéduraux; d'expliciter des liens entre diverses représentations de concepts ou de procédures mathématiques; d'expliciter des liens entre les notions informelles, intuitives, quotidiennes et le langage abstrait et symbolique des mathématiques*<br>- *Dans le contexte des causeries mathématiques, elle permet de redonner à la compréhension conceptuelle sa place dans le cheminement d'apprentissage en mathématiques puisque les causeries mettent en valeur les diverses stratégies des élèves et les éloignent des algorithmes de calculs* | Boaler (2014); Parrish (2011); Rauscher (2006); Richardson (2011); MÉLS (2003); Revue de littérature de différents programmes de formation. |
| **La communication écrite joue plus spécifiquement un rôle dans la construction des savoirs mathématiques et dans l'organisation de la pensée**<br>- *La communication écrite à un caractère plus exigeant et favorise une construction des savoirs puisqu'elle force l'élève à organiser sa pensée, à mieux articuler ses pas de raisonnements*<br>- *Il est crucial de passer à une production écrite qui utilise les possibilités cognitives spécifiques d'organisation et de contrôle qu'offre la représentation visuelle du discours*<br>- *Elle améliorerait la compréhension de l'élève*<br>- *Elle permet à l'élève de comprendre davantage les liens mathématiques entre différentes représentations pour l'amener à être un meilleur résolveur de problèmes*<br>- *Elle permet à l'élève d'approfondir ses représentations personnelles des mathématiques et d'avoir une réflexion plus profonde dans ses résolutions ou ses résumés* | Borasi et Rose (1989); Clarke et al. (1992); Duval (2000); Hiebert et Carpenter (1992); Rauscher (2006); Rose (1989). |
| **La communication écrite permet de développer l'argumentation**<br>- *Elle permet aux élèves de dépasser le stade de l'action pour graduellement entrer dans une activité de validation des savoirs*<br>- *En amenant l'élève à choisir un discours ou une forme de rédaction selon l'intention de communication (informer, justifier ou prouver)* | Rauscher (2006); MÉLS (2003). |
| **La communication permet le développement du formalisme mathématique**<br>- *Elle permet de s'approprier et consolider des éléments du langage mathématique*<br>- *La communication, lorsqu'utilisée dans un contexte de collaboration pour rédiger un message, jumelée à la communication à un pair (pour décoder le message), favorise le recours plus fréquent et de meilleure qualité au formalisme tout en rendant plus explicites les formulations des élèves* | Schubauer-Leoni et Perret-Clermont (1980); MÉLS (2003). |
| **La communication est au service du développement de l'esprit critique et d'une curiosité mathématique**<br>- *Elle amène l'élève à s'ouvrir à différents points de vue*<br>- *Elle amène l'élève à poser des questions à caractère mathématique; d'initier la discussion de groupe autour de problématiques d'ordre mathématique*<br>- *Elle permet à l'élève de proposer une critique d'un modèle mathématique et de ses résultats* | Boaler (2014); Parrish (2011); Rauscher (2006); Richardson (2011); MÉLS (2003); PISA (2003). |

*Tableau 2 - Synthèse des apports et des fonctions des interactions en mathématiques*

| Apports et fonctions des interactions | Références |
|---|---|
| **Les interactions entre les élèves**<br>- *Elles améliorent les aptitudes à la résolution de problèmes et la compréhension des concepts sans toutefois négliger les calculs mathématiques de base*<br>- *Elles permettent d'entrer en relation avec différents auditoires et conséquemment d'adapter son discours*<br>- *Elles permettent de développer des capacités d'écoute et d'expression indispensables à l'exercice de la compétence de communication*<br>- *Elles permettent d'entrer en relation avec ses pairs de manière à partager ses idées, à discuter ou à réviser*<br>- *Dans le cadre de causeries mathématiques, les interactions entre les élèves aident à développer et à maintenir une grande flexibilité dans leurs réflexions sur les nombres*<br>- *Dans le cadre de causeries mathématiques, les élèves redécouvrent qu'ils peuvent eux-mêmes construire le sens en mathématiques, convaincre ou critiquer avec des arguments mathématiques et construire à partir du raisonnement de leurs pairs*<br>- *Dans le cadre des causeries mathématiques, les élèves développent leur sentiment d'efficacité personnelle. Ils deviennent plus volontaires à persévérer en résolution de problème et intéressés à partager et questionner les idées mathématiques* | Boaler (2014); Bruce (2007); Parrish (2011); Richardson (2011); MÉLS (2003); Revue de littérature de différents programmes de formation. |
| **Les interactions entre l'enseignant et les élèves**<br>- *Elles permettent à l'enseignant de déterminer le niveau de compréhension de ses élèves*<br>- *En proposant des situations favorisant les interactions entre les élèves, l'enseignant permet de construire le sens de certains concepts, termes ou symboles mathématiques et permet aussi de créer la discussion, voire la « négociation » ou la « co-construction » du sens*<br>- *Les échanges, enseignant-élève, via le questionnement ou d'autres types d'interactions autour des erreurs commises, peuvent s'avérer féconds dans la mesure où ils deviennent «un moteur de recherche pour trouver une nouvelle solution »*<br>- *Il importe d'encourager le questionnement des élèves pour favoriser le processus d'apprentissage en créant un environnement sécuritaire pour l'élève*<br>- *Le recours à des problèmes de type plus « ouverts » permet davantage à l'enseignant d'accéder aux raisonnements des élèves* | Bednarz (1996); Bishop (1985); Giroux (2004); Kemmerle (2013); Goffard et Goffard (2003); Revue de littérature de différents programmes de formation. |

## 2.4 La communication au service de l'argumentation

Dans les deux précédents tableaux, résumant les apports de l'exploitation de la communication en classe mis en évidence par la recherche, certains éléments plus spécifiques à l'argumentation et à la validation ont été soulignés. En effet, tel que vu plus tôt (**section 1.3.3**), la validation du travail mathématique du mathématicien est fondamentale afin qu'il puisse se convaincre et convaincre ses homologues de la véracité de ses résultats, et ce, en référant à des théorèmes et à des propriétés qui font l'objet d'un consensus dans sa communauté scientifique. En mathématiques, on se demande « *ce que je viens de d'inventer est-il vrai?* » et, à plus forte raison, « *est-ce toujours vrai?* ». Plusieurs auteurs ont ainsi mis en évidence l'importance de l'argumentation et de la validation dans l'activité mathématique afin de convaincre. Pour travailler l'argumentation et la validation avec les élèves, la communication apparaît essentielle. Il s'agit alors d'une communication qui leur demande d'aller au-delà de la simple narration de leur production (« *voici ce que j'ai fait…* »). Devant des problèmes mathématiques, on cherchera à amener les élèves à communiquer, non pas simplement ce qu'ils ont fait, mais les raisons pour lesquelles ils l'ont fait, quel est leur raisonnement, d'où proviennent leurs conclusions et comment ils les valident.

Le principal but de l'argumentation étant de convaincre, un élève peut argumenter sans se préoccuper du caractère de vérité de l'affirmation originale (Balacheff, 1987, 1988; Duval, 1991). Les arguments peuvent être vrais ou faux. Notons aussi que les arguments invoqués par un élève pour convaincre ne sont pas nécessairement appuyés mathématiquement. Ainsi, un élève qui argumente peut utiliser un argument d'autorité pour convaincre les autres. Au lieu de parler d'argumentation, Duval préfère l'emploi de l'expression « raisonnement argumentatif ». Pour ce chercheur, la valeur des énoncés d'un élève est alors déterminée par son contenu sémantique. Le raisonnement argumentatif est une forme de preuve, mais qui peut être peu convaincante au niveau strictement mathématique. En effet, il peut arriver que ce type d'argument soit produit dans le seul but de renforcer des propos ou de s'opposer à des propos émis par d'autres.

Afin de valider des hypothèses issues de leurs expérimentations mathématiques et d'en généraliser la portée, les élèves doivent consolider leur certitude face aux résultats mathématiques à travers la construction de preuves. Cette construction peut se faire, entre autres, à travers l'argumentation. L'argumentation doit alors permettre à l'élève non seulement de convaincre les autres, mais également d'être rigoureux dans son raisonnement (Van Dormolen, 1977). Pour être plus rigoureux, l'élève doit d'abord douter de la rigueur utilisée dans son propre travail (Van Dormolen, 1977; Hoyles, 2008). Il doit être lui-même en mesure de juger de la qualité de son travail, sans avoir à se reporter à une forme d'autorité, comme son enseignant par exemple.

Les travaux de Balacheff, sur les niveaux de preuve, apportent un éclairage essentiel pour appréhender le discours argumentatif d'un élève. La prochaine section en rend compte.

### *2.4.1 Les niveaux de preuves de Balacheff*

Balacheff (1988) distingue les termes « explication », « preuve » et « démonstration » qui peuvent être considérés comme des niveaux différents de raisonnement. Pour l'auteur, l'explication constitue un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons ou les arguments qui sont avancés dans l'explication peuvent être discutés, acceptés ou refusés. La preuve quant à elle est une explication acceptée par une communauté donnée, à un moment donné. Enfin, la démonstration est une preuve acceptée et attestée par la communauté des mathématiciens et qui revêt une forme particulière, soit l'utilisation d'un langage spécifique et des références à une théorie. La démonstration est donc la forme achevée du raisonnement dont le but, contrairement à la preuve, n'est pas seulement de convaincre, mais de prouver le caractère de vérité.

Balacheff distingue plusieurs niveaux de preuve:

- L'empirisme naïf : « ce type de preuve consiste à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas » (Balacheff, 1988, p. 56).
- L'expérience cruciale : « il s'agit ici d'un processus qui consiste à vérifier une proposition sur un cas pour lequel « on ne se fait pas de cadeau » en affirmant que « si cela marche, alors cela marchera toujours […] ce type de validation se distingue de l'empirisme puisque l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnait pour aussi peu particulier que possible » (Ibid., p. 57).
- L'exemple générique : consiste en « l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe […] la formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une classe en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants » (Ibid., p. 58).
- L'expérience mentale : « invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre, ce qui était le cas pour l'exemple générique » (Ibid., p. 58).
- Le calcul sur les énoncés : ce sont des « preuves qui ne doivent rien à l'expérience. Ce sont des constructions intellectuelles fondées sur des théories plus ou moins formalisées, plus ou moins explicitées, des notions en jeu dans la résolution de problème. Ces preuves apparaissent comme le

résultat de calcul inférentiel sur des énoncés. Elles s'appuient sur des définitions, ou des propriétés caractéristiques explicites » (Ibid., p.58).

L'auteur classe les trois premiers types dans les preuves pragmatiques, la quatrième marquant l'entrée dans les preuves intellectuelles, dont la démonstration est en quelque sorte la forme achevée : « le recours à l'expérience mentale marque véritablement le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles dans la mesure où ce ne sont plus des actions effectives, mais des actions intériorisées (au sens piagétien) qui sont mises en œuvre » (Ibid., p. 59). Selon Balacheff, « les actions intériorisées se trouvent dans la genèse des opérations qui seront nécessaires à l'élaboration de preuves de niveau plus élevé » (1988, p. 59).

Toujours selon Balacheff (1987), le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, notamment à la démonstration, repose sur trois pôles qui interagissent fortement entre eux : le pôle des connaissances (nature des connaissances des élèves); le pôle langagier; et le pôle des types de rationalité qui sous-tendent les preuves produites.

La nature des connaissances des élèves se décline, de façon hiérarchique, des connaissances pratiques (savoir-faire de l'élève), aux connaissances comme objet (savoir) et finalement aux connaissances théoriques et reconnues (savoir-scientifique).

Le pôle langagier se déclinerait de l'ostension (« les opérations et les concepts qu'elles mobilisent sont agis : « la preuve ?... ça marche ! » (Balacheff, 1987, p. 158)), au langage de la familiarité, au langage fonctionnel, puis au formalisme naïf.

Dans cette perspective, certaines formulations de preuves dans lesquelles l'élève se contente de narrer de son action pourraient être qualifiées d'ostensives : il décrit ce qu'il fait sans vraiment le justifier. À l'autre extrémité, on peut envisager une formulation de preuve d'un niveau plus élevé, se rapprochant davantage d'une preuve intellectuelle, où l'élève communique les raisons pour lesquelles les actions sont valides et conduisent bien au résultat cherché. On voit ainsi, comme le propose Balacheff, que les pôles langagiers et du type de rationalité, notamment, sont très liés.

La *Théorie anthropologique du didactique* de Chevallard (1991a; 1991b; 1998) permet, elle aussi, d'offrir une déclinaison de l'argumentation en jeu de la part des élèves auxquels on propose des problèmes mathématiques à résoudre. Nous y consacrons la prochaine sous-section.

#### *2.4.2 La praxéologie issue de la Théorie anthropologique du didactique*

Chevallard (1991a; 1991b; 1998) modélise l'activité mathématique dans le cadre de la *Théorie anthropologique du didactique* (TAD). Cette théorie considère que toute activité humaine consiste à accomplir une *tâche* d'un certain type, au moyen d'une *technique*, justifiée par une *technologie* qui permet en même temps de la penser, de la produire, et qui, à son tour, est justifiable par une *théorie*.

Ainsi, toute technique doit être justifiée, c'est-à-dire supportée par un « discours raisonné » (*logos*) portant sur cette technique (*tekhnè*) » (Ibid., p. 3). C'est ce que l'on nomme la *technologie*. On peut penser ici aux explications liées à un algorithme (*« pourquoi multiplie-t-on les « extrêmes » pour ensuite diviser par un des « moyens » lorsque l'on cherche la quatrième proportionnelle par le produit croisé ? »).*

La technologie de cette technique « contient au moins le « discours démonstratif » dont cette identité constitue la conclusion – le « résultat » » (Ibid., p, 4). Or, lorsqu'on développe un argumentaire, certaines des affirmations que l'on fait sont justifiées par un discours de niveau supérieur que Chevallard appelle la *théorie*. En association avec le bloc [*Tâches/Technique*] émerge ainsi un second bloc, [*Technologie/Théorie*] qu'on peut « identifier à ce que la langue courante nomme – de manière réductrice – un *savoir* » (Ibid., p. 4).

Le système des quatre composants [*Tâches/Technique/Technologie/Théorie*] constitue une *praxéologie* et permet de modéliser, notamment, l'argumentation mathématique : plus l'élève entre dans un discours technologique ou théorique, plus son argumentaire est développé, c'est-à-dire appuyé sur des savoirs mathématiques validés et attestés et, conséquemment, plus sa communication devrait être convaincante pour qui la reçoit.

Un parallèle peut être fait entre les conduites de communication de l'élève résolvant un problème et la composante « technologique » de la praxéologie décrite. Plus l'élève s'éloigne de la narration de sa stratégie pour la justifier et, à plus forte raison, la valider, plus il entre dans un discours à propos de ses techniques, soit dans un discours technologique : la justification étant un premier pas dans la technologie alors que la validation se situe davantage à la porte du discours théorique.

### *2.4.3 Une première caractéristique d'une communication riche*

Les travaux de recherche qui viennent d'être abordés, de même que les programmes d'étude qui ont fait l'objet d'une analyse, montrent que la communication est un élément central qui permet d'outiller les élèves dans leur travail de validation et de preuve. En effet, c'est par la communication que les élèves pourront fournir les arguments et les raisons qui permettent de « rendre intelligible le caractère de vérité » (Balacheff, 1988) de leur proposition, en d'autres termes, de déployer une argumentation. Ainsi, nous considérons qu'une communication riche est une communication qui met en jeu une argumentation ou, dit autrement, qui supporte un discours technologique. Les arguments à l'appui n'ont toutefois pas tous la même valeur, tel que le précisent les travaux de Balacheff et de Chevallard. Plus ces arguments tendent vers un haut niveau hiérarchique de preuve, plus la communication est jugée riche. Une communication riche et pertinente met donc en jeu une argumentation qui s'éloigne d'un discours ostensif et tend vers la mise en place d'une justification ou d'une validation qui s'appuient sur des savoirs mathématiques adéquats et partagés par la communauté.

Ainsi, une argumentation ostensive, qui ne fait, par exemple, que narrer une suite de calculs, constituerait une communication très peu riche, puisqu'elle ne met pas en jeu d'éléments de justification ou de validation, hiérarchiquement plus élevés dans le spectre de la description de l'argumentation.

Par ailleurs, l'organisation du discours est également un critère à considérer pour qualifier la communication. En effet, Demers et Radford (2004), tout en mettant en évidence l'importance de l'argumentation, se sont intéressés à d'autres dimensions de la communication[32], notamment à l'organisation du discours.

Les auteurs se sont interrogés sur les façons de choisir des activités de communication pertinentes ainsi que sur les stratégies de gestion de classe qui favorisent le mieux les situations d'argumentation, de preuve et de discussion entre les élèves. Ils cherchent des moyens d'opérationnaliser l'observation de la communication et ciblent ainsi des critères d'évaluation pour rendre compte du développement de la communication en classe de mathématiques. Ces critères peuvent être utiles pour identifier d'autres éléments qui témoignent de la richesse de la communication.

*2.4.4 Une deuxième caractéristique caractéristique d'une communication riche*

Demers et Radford retiennent quatre critères pour observer la communication en classe de mathématiques. Les deux premiers critères sont relatifs à la communication écrite et viennent compléter ce qui a été présenté précédemment. Les deux derniers critères sont davantage liés à la communication orale.

1. *Avec clarté, exactitude, l'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématiques;*
2. *Avec clarté, logique et efficacité, l'élève organise, présente, justifie et appuie ses idées à l'aide de différentes formes de communication (par exemple, des projets, des diagrammes, des croquis, des dessins);*
3. *Avec clarté, pertinence et profondeur, l'élève exprime des propos ou présente des arguments pour faire valoir ses points de vue mathématiques;*
4. *L'élève est à l'écoute des arguments ou des propos des autres; il ou elle donne suite aux arguments ou propos de ses pairs.*

Le premier critère se centre sur la maîtrise du langage mathématique atteinte par l'élève, du sens que véhicule ce langage et sur la syntaxe : *avec clarté, exactitude, l'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématiques*. Ce critère repose sur deux descripteurs : la clarté et l'exactitude. Selon les auteurs, le « critère prend en considération le fait que les conventions et les modes

[32] Particulièrement dans le contexte d'implantation des programmes ontariens

d'organisation du texte mathématique écrit sont l'aboutissement d'un long processus historico-culturel que l'élève doit s'approprier au cours de son passage à l'école » (Demers et Radford, 2004, p. 21). Les systèmes de numération de nombres (unités, dizaines, etc.), le langage algébrique, les graphiques et les tableaux reposent sur des sens et des syntaxes complexes dont les subtilités de fonctionnement ne sont comprises qu'après plusieurs années, toujours selon les auteurs.

Le deuxième critère se centre sur l'usage de différentes formes de communication écrite et on y voit l'idée d'argumentation avec la référence à la justification et au fait « d'appuyer ses idées ». Les idées de clarté et d'organisation sont aussi au cœur de ce critère.

Ce critère vise l'efficacité du discours mathématique de l'élève et tient compte des éléments essentiels suivants : la pertinence et la qualité de la présentation, d'une part, et l'utilisation de différentes formes de communication, d'autre part :

> « L'organisation de la présentation repose en grande partie sur un choix d'arguments et sur leur articulation. Pour faire un choix convenable, l'élève doit pouvoir distinguer entre des arguments qui sont clairs et d'autres qui ne le sont pas; de plus, l'élève doit pouvoir utiliser des arguments logiques et reconnaître ceux qui sont efficaces par rapport au contexte » (Demers et Radford, 2004, p. 22).

L'utilisation de différentes formes de communication, quant à elle, renvoie essentiellement au choix du « système de signes » utilisé pour organiser la présentation de la communication. Demers et Radford (Ibid.) en nomment d'ailleurs plusieurs : le système algébrique (formules et équations); le système de représentations graphiques (pictogramme, divers types de graphiques, système cartésien, etc.); la langue parlée et écrite; et le système des gestes, paradoxalement ignoré selon les auteurs.

Le troisième critère s'applique davantage à la communication orale et à la capacité de l'élève à s'engager dans un dialogue : *avec clarté, pertinence et profondeur, l'élève exprime des propos ou présente des arguments pour faire valoir ses points de vue mathématiques*. Ces chercheurs ne s'intéressent donc pas uniquement à la communication écrite, mais évaluent également la communication orale en classe.

Le dernier critère examine la communication de l'élève à la lumière de sa capacité à écouter les autres et à donner suite à leurs arguments : *l'élève est à l'écoute des arguments ou des propos des autres; il ou elle donne suite aux arguments ou propos de ses pairs*. Tout comme le troisième critère, ce quatrième critère est davantage relié à la communication orale. Il y a également dans cette idée de « donner suite aux arguments » l'idée d'interaction entre les élèves dans un but de développer leur argumentaire oral[33].

[33] Cela rappelle encore une fois les travaux de Parrish (2011), Richardson (2011) et Boaler (2014) sur les Number Talks présentés à la **section 2.3.2**.

Ainsi, pour qualifier la richesse de la communication, nous avons retenu la présence d'une argumentation, laquelle se situe sur un spectre, tel que décrit précédemment. La présence de l'argumentation se retrouve aussi dans la description de la communication que font Demers et Radford à laquelle ils ajoutent une hiérarchisation de l'organisation de la communication qui repose sur l'articulation des arguments avancés et sur la clarté de ces derniers. Nous y voyons une deuxième caractéristique d'une communication riche : l'organisation des arguments. L'organisation relève davantage de la forme de la communication alors que l'argumentation relève du fond.

Demers et Radford (2004) rassemblent les quatre critères dans une grille d'évaluation, à quatre niveaux, qui vise à rendre compte du niveau de rendement de la compétence que l'élève atteint à un moment précis de son développement, tant dans une dimension écrite qu'orale. Cette grille, qui nous a été utile pour développer un outil de compilation des données, est présentée à l'**annexe 2.**

Nous venons de faire le point sur la communication mathématique en classe et, notamment, sur ce qui définit une communication riche. Afin de nous donner les moyens d'étudier des façons *d'organiser un enseignement de manière à favoriser et à faciliter une communication en classe utile et nécessaire à l'apprentissage des mathématiques*, il importe de recourir à une théorie qui modélise l'enseignement et l'apprentissage des élèves. La *Théorie des situations didactiques* répond bien à ce besoin comme nous allons le voir.

## 2.5 La Théorie des situations didactiques : un modèle qui permet une analyse de l'activité mathématique et de la communication

Nous avons vu que la communication est indissociable de l'activité mathématique. La *Théorie des situations didactiques* (TSD) paraît pertinente à l'étude puisqu'elle propose que l'enseignant mette en place des situations pour les élèves afin qu'ils se posent des questions et cherchent à y répondre. Elle cherche à recréer l'activité du mathématicien chez les élèves en mettant en place une genèse artificielle des savoirs.

Ainsi, si le souhait est d'engager les élèves dans une activité mathématique, la TSD est toute désignée pour servir de modèle d'analyse. Elle constitue le modèle didactique retenu pour inscrire la communication au sein de l'activité mathématique. La prochaine section s'y consacre.

### *2.5.1 Les visées de la théorie des situations didactiques*

La *Théorie des situations didactiques* a été élaborée par Brousseau dans les années soixante-dix. Elle cherche à modéliser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Depuis, elle n'a pas cessé de se développer sous l'effet des nouvelles questions qu'elle a fait émerger et des observations empiriques qu'elle a produites et mises en relations.

La TSD ne s'inscrit pas directement dans la théorie piagétienne, mais s'en inspire et y emprunte, notamment, le concept d'apprentissage par adaptation. Ainsi, Brousseau adopte la proposition selon laquelle les élèves apprennent par adaptation et développent de nouvelles connaissances par leurs interactions avec un milieu[34]. C'est de cette manière que l'élève apprend : par adaptation avec les milieux auxquels il est confronté. Brousseau suggère une conception de l'enseignement où l'enseignant propose des situations à ses élèves qui sont susceptibles de provoquer des adaptations chez ces derniers, adaptations qui correspondent aux apprentissages visés.

À l'école, et plus particulièrement en classe, l'enseignant met tout en œuvre pour créer une situation a-didactique[35] afin que la connaissance naisse de la confrontation des élèves à un milieu. La situation est choisie par l'enseignant de manière à ce que la stratégie de résolution ne puisse être mise en œuvre que grâce à une certaine connaissance mathématique dont la probabilité d'apparition et d'utilisation par l'élève dans la situation est grande.

Les notions de milieu, de dévolution et de situation a-didactique sont utiles pour fonder le développement d'un enseignement et ces concepts sont développés dans la sous-section qui suit.

### *2.5.2 La notion de milieu, la dévolution et la situation a-didactique*

La TSD modélise les relations entre les trois composantes du système didactique: le savoir scolaire, l'enseignant et l'élève. Dans la TSD, les conditions d'utilisation particulière d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation ». Brousseau définit une situation « comme l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution » (1986, p. 155). La situation dépasse donc le problème mathématique remis aux élèves souvent sous forme écrite. Elle est plus large. Elle englobe les circonstances et les relations de l'élève avec le milieu[36].

En classe de mathématiques, l'élève construit ses connaissances en s'adaptant à un milieu qui est une source de contradictions et qui va générer un besoin d'adaptation de sa part. Pour provoquer la rencontre d'un élève avec un savoir mathématique, l'enseignant propose une rencontre entre l'élève et un milieu pour faire émerger l'insuffisance ou l'échec des connaissances mises en œuvre par l'élève face à un problème. Il tente de lui faire réaliser les limites du domaine de validité de la connaissance qu'il met en œuvre et qu'il a l'habitude de mobiliser devant un problème semblable. L'enjeu de l'apprentissage réside, pour une bonne part, dans le contrôle, par l'élève, de son activité dans une situation. Les situations sont donc au cœur du

---

[34] Ce concept de milieu est défini dans la prochaine sous-section.

[35] On sous-entend ici un milieu où l'évolution de l'élève n'est soumise à aucune intervention didactique directe de la part de l'enseignant.

[36] Le glissement entre problème et situation est assez courant. Dans la pratique, on réfère en effet souvent à la situation comme étant le problème (format papier) remis à l'élève. Brousseau parle plutôt de milieu matériel pour qualifier notamment le problème mathématique sur une feuille qu'on remet à l'élève.

sens que l'élève donne aux connaissances qu'il acquiert. Les connaissances prennent tout leur sens dans la mesure où elles favorisent l'avancement de l'élève dans la résolution des problèmes.

Pour faire émerger une activité mathématique chez l'élève, l'enseignant choisit des problèmes susceptibles de provoquer les adaptations souhaitées au milieu. Les problèmes amènent l'élève à interagir avec le milieu défini par Brousseau comme le « […] système antagoniste du système enseigné » (1998, p. 93). On dit du milieu qu'il est antagoniste puisqu'il est « source de contradictions, de difficultés, de déséquilibres » (Brousseau, 1988, p 325) pour l'élève qui cherche à apprendre. C'est le postulat de la TSD que décrit précédemment : l'élève apprend par adaptation par les propositions qu'il fait dans le milieu. La responsabilité de l'apprentissage est ainsi principalement du côté de l'élève et moins du côté de l'enseignant.

L'enseignant doit aussi s'assurer de la dévolution de la situation. Pour qu'il y ait dévolution, l'élève doit accepter la responsabilité de la résolution du problème de manière à produire la connaissance visée. La dévolution consiste non seulement à présenter à l'élève le « jeu » auquel l'enseignant souhaite qu'il « joue », mais aussi à s'assurer que l'élève se sente responsable (« au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité ») du résultat qu'il doit chercher (Brousseau, 1988).

Pour assurer la dévolution, on doit faire en sorte que l'élève se maintienne en situation a-didactique afin de s'adapter au milieu qu'on lui propose et non pas aux volontés de l'enseignant.

Citons Brousseau pour définir ce qu'est une situation a-didactique (1998, p. 49) :

> « Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse d'intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle, mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement, il le peut, mais il le doit aussi, car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée a-didactique ».

Les situations a-didactiques sont des situations dans lesquelles l'enseignant réussit à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève doit faire. Ce sont les situations « qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances » (Brousseau, 1998, p. 311). Il paraît important de préciser que même si l'enseignant fait la dévolution du problème à l'élève, cela ne veut pas dire pour autant qu'il est inactif dans la situation a-didactique. En effet, l'enseignant, d'une part, peut s'assurer de maintenir l'élève dans la situation a-didactique en répétant une consigne, par exemple, et, d'autre part, peut observer l'élève résoudre le problème. Il recueille ainsi plusieurs informations lui permettant, notamment, de donner une rétroaction, par exemple, en agissant sur le milieu, ou faire des ajustements dans son enseignement et dans ses planifications subséquentes, etc.

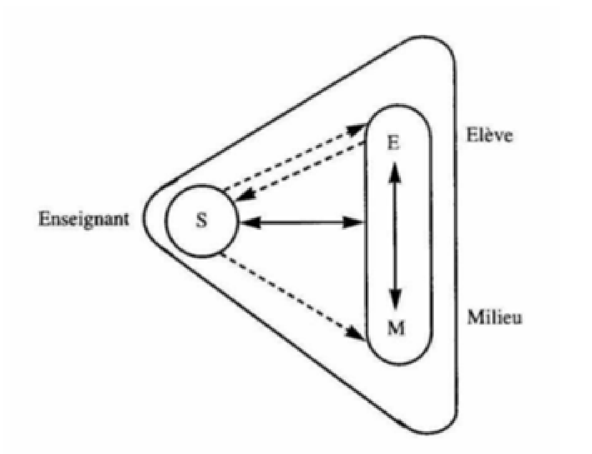
L'élève en situation a-didactique interagit avec un milieu. Le milieu a une dimension relative à chaque élève. En effet, précisons que le milieu avec lequel interagit l'élève ne correspond pas nécessairement à celui souhaité par l'enseignant puisque chaque élève interagit avec le milieu avec son propre bagage affectif, de connaissances et avec sa propre stratégie pour arriver à résoudre le problème (René de Cotret, 2013). René de Cotret propose en effet de distinguer le milieu senti du milieu perçu. Pour la chercheure, le milieu senti est défini « comme ce à quoi est sensible un sujet étant donné son équipement sensoriel » (Ibid., p. 106). Quant au milieu perçu, il est « constitué de la perception que se construit le sujet à partir de son milieu senti » (Ibid.). Et la perception qu'a un élève est fonction principalement des connaissances qu'il a mobilisées dans « son interaction avec le milieu senti ». À ce stade-ci, retenons qu'un milieu soumis par l'enseignant à plusieurs élèves en même temps peut donner lieu à plusieurs milieux et plusieurs expériences.

En classe, l'élève interagit avec un milieu en situation, mais il interagit aussi avec son enseignant et les autres élèves de la classe qui peuvent être considérés comme faisant partie du milieu. Plus généralement, la situation a-didactique s'inscrit dans la situation didactique, laquelle englobe l'environnement de l'élève, incluant son enseignant. Brousseau a d'ailleurs schématisé les diverses interactions dans la situation didactique. Puisque la présente recherche s'intéresse à la communication dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, il paraît utile de nous appuyer sur des travaux qui traitent des diverses interactions en classe pour fonder notre étude. La prochaine section débute par la présentation du schéma de la situation didactique et se poursuit par la définition du contrat didactique et du paradoxe de la dévolution.

### *2.5.3 La situation didactique, le contrat didactique et le paradoxe de la dévolution*

La situation didactique est une situation dont l'intention manifeste est d'enseigner, soit de modifier ou de faire naître les connaissances d'un élève (Brousseau, 1998). Plus formellement, une situation didactique décrit les relations pertinentes d'un sujet apprenant avec un sujet enseignant et ce, à travers un milieu investi par l'élève pour lui faire s'approprier un savoir déterminé. Brousseau schématise ainsi le système d'interactions qui vise à faire émerger la connaissance par la situation didactique, dont les trois composantes *milieu-enseignant-élève* sont représentées à la figure 1 :

*Figure 1 - La situation didactique de Brousseau (1998)*




Le schéma représente les relations ou les jeux qui se déploient entre l'élève, le milieu et l'enseignant, étant entendu que le jeu de l'élève avec le milieu est spécifique au savoir (d'où la lettre « S » dans le schéma). L'interaction principale (double flèche pleine horizontale) de l'enseignant s'effectue avec un système lui-même composé de l'interaction élève-milieu (double flèche verticale) (Margolinas, 2004). Cette interaction principale représente les actions et aussi les rétroactions de l'enseignant avec le milieu a-didactique de l'élève.

La double flèche verticale sur la figure 1 représente les actions et rétroactions entre l'élève et le milieu dans la situation a-didactique.

L'enseignant interagit également directement avec l'élève et agit sur le milieu, mais parfois « ces actions et interactions ne sont que secondaires (flèches pointillées) » (Margolinas, 2004, p. 72). Dans ce cas, elles sont représentées par les flèches tracées en pointillées et sont alors subordonnées aux flèches pleines. Elles illustrent des actions de l'enseignant sur l'élève, par exemple, pour le ramener à la tâche, lui rappeler une consigne, répondre à une question l'encourager (la flèche pointillée en haut : *Enseignant vers Élève*). Ces interactions ne sont alors pas strictement sur le savoir.

L'enseignant agit aussi sur le milieu de l'élève en choisissant les problèmes et les conditions de réalisation (la flèche pointillée du bas : *Enseignant vers Milieu*). La flèche pointillée de l'élève vers l'enseignant peut représenter une question de l'élève liée à la tâche et non pas une question directement avec le savoir en jeu. Par exemple : « *combien de temps reste-t-il à l'activité ?* ». Une question relative au savoir est représentée par la double flèche horizontale puisqu'elle est le résultat des actions de l'élève avec le milieu.

Dans la situation didactique, « le professeur et l'élève interagissent à partir des formulations et preuves produites par l'élève, dans un rapport réflexif à la situation a-didactique d'apprentissage »

(Margolinas, 2004, p. 73). La chercheure précise alors que l'enseignant est responsable des phases de conclusion, qu'elle qualifie comme la possibilité soit de « renvoyer l'élève aux interactions a-didactiques avec le milieu (validation) soit de statuer sur la validité des énoncés produits (évaluation) » (Ibid.). Ces interactions participent, d'une part, au processus de dévolution et, d'autre part, comme nous le verrons, à la phase d'institutionnalisation.

Selon Margolinas (2004), Brousseau « ne considère pas de position du professeur dans la situation d'apprentissage a-didactique elle-même » (p. 73). Or, une position au cœur même de la situation a-didactique est nécessaire pour l'enseignant qui intervient à la fois pour permettre l'interaction de l'élève avec le milieu a-didactique qu'il construit, mais également pour observer les procédures des élèves pendant la phase de résolution. Les connaissances de ces procédures lui permettent de prendre des décisions pendant la situation d'enseignement. Elles constituent une partie du milieu de cette situation. La situation devient donc, aussi pour l'enseignant, un lieu d'apprentissage sur ce que savent ou non les élèves et pour lui permettre d'attester des limites de certaines connaissances qui émergent.

Au cœur de la situation se trouve cette idée que l'enseignant a pour projet d'enseigner à l'élève des savoirs mathématiques[37]. La situation permet à l'élève, par ses actions, de mobiliser des connaissances dans un milieu construit spécifiquement pour que le jeu qu'il déclenche appelle le recours aux connaissances visées, pour ainsi constater les effets de ses actions, et le cas échéant, de prendre conscience qu'il n'a pas toutes les connaissances nécessaires à la réalisation du problème. Par conséquent, les interactions effectives dans la situation permettent de susciter la nécessité pour l'élève d'en apprendre davantage, de construire de nouvelles connaissances. L'enseignant espère que l'interaction des élèves avec le milieu constitue une activité mathématique qui amène le développement de connaissances mathématiques.

Les connaissances sont aussi ce qui maintient l'élève en équilibre avec le milieu. Si les savoirs à partir desquels la situation proposée à l'élève est construite sont trop éloignés des connaissances de l'élève, celui-ci risque de ne pas s'y engager. Si, au contraire, les connaissances de l'élève sont pratiquement en adéquation avec le savoir scolaire sur lequel se fonde la situation, l'élève s'y engagera probablement, sans réel défi, ou sans y percevoir un enjeu, ou pour jouer son rôle d'élève, avec les obligations implicites que lui impose le contrat didactique.

Les connaissances de l'élève sont en effet de plusieurs ordres : ses connaissances antérieures, les trucs qu'il a mémorisés, mais aussi des connaissances qu'il a construites de son expérience des relations avec les enseignants, notamment les attentes relevant du *contrat didactique*. Ces connaissances peuvent être

[37] D'ailleurs, dans le schéma de la figure 1, nous émettons humblement l'hypothèse que la lettre « S », qui représente le savoir, est placée près du pôle « Enseignant », pour rappeler peut-être que l'enseignant est détenteur du savoir et que son rôle est de proposer des milieux qui permettront l'émergence des connaissances des élèves.

celles que l'élève juge les plus efficaces pour arriver à une bonne réponse selon les attentes qu'il perçoit de son enseignant. Il est en mesure de décoder, chez son enseignant, des attentes de sa part, explicites ou non.

Brousseau définit le contrat didactique comme étant :

> « […] l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la *situation didactique*
> - impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres
> - et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose, à propos de la connaissance en cause » (2010, p. 10).

Il arrive parfois qu'au contact d'une situation ou d'un contexte donné, l'élève reconnaisse ou infère une attente de son enseignant à l'égard du savoir. Afin de se conformer à cette attente, il reproduit ce qu'il croit avoir décodé sans peut-être lui accorder du sens. Par exemple, devant un problème arithmétique présentant trois données connues, l'élève voulant utiliser la technique du produit croisé puisqu'il croit reconnaître la forme classique avec laquelle on lui présente des problèmes faisant appel à des proportions, que cela soit le cas où non. On constate alors que l'effet du contrat qui unit l'enseignant à l'élève est plus fort que le sens accordé par l'élève à l'identification d'une situation de proportionnalité. Il reconnaît une forme, celle de la recherche de la 4$^{e}$ proportionnelle, mais sans la soumettre au contrôle du sens.

Aussi, il peut arriver que la stratégie employée par l'élève pour résoudre un problème donné soit influencée par le contexte d'enseignement récent auquel il a été confronté. À titre d'exemple, dans le cadre de l'enseignement du chapitre de l'algèbre, devant un problème qui peut tout aussi bien être résolu plus efficacement par une méthode arithmétique, les élèves peuvent avoir tendance à algébriser le problème, même si ce n'est pas la solution la plus optimale. Ces derniers décodent en effet qu'en présentant ce problème, dans le contexte d'enseignement de l'algèbre dans lequel ils sont plongés, l'enseignant s'attend à ce type de résolution et les élèves répondent ainsi aux attentes qu'ils décodent.

Un effet du contrat didactique est illustré par l'exemple précédent. Le contrat didactique est le résultat d'une « négociation » souvent implicite des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et le système éducatif dans lequel ils évoluent: il n'est pas consenti formellement par les deux partis, il est implicite. Pour Brousseau, il est « insoutenable ». Il met l'enseignant devant un paradoxe. En effet, si celui-ci fait tout ce qu'il peut pour voir produire par les élèves les comportements attendus, cela tend à diminuer l'incertitude des élèves et les prive des conditions pour arriver à la compréhension et l'apprentissage du concept mathématique visé. « Si le maître dit ou signifie ce qu'il veut que l'élève fasse, il ne peut plus l'obtenir que comme exécution d'un ordre et non par l'exercice de ses connaissances et de son jugement (premier paradoxe didactique) » Brousseau (2010, p. 6)[38].

L'élève est lui aussi devant un paradoxe: s'il accepte que, selon le contrat, l'enseignant lui donne les stratégies et les solutions aux problèmes proposés, il ne les établit pas lui-même et donc, il n'engage pas les connaissances mathématiques nécessaires et ne peut s'approprier les dites solutions. Il n'apprend tout simplement pas. Brousseau synthétise que « vouloir apprendre, impliquerait alors pour [l'élève] de refuser le contrat » (Ibid., p. 6) du moins de manière provisoire. Nous venons ainsi de décrire le *paradoxe de la dévolution* des situations. En résumé, l'enseignant veut que l'élève trouve la réponse de lui-même, mais en même temps il désire, et il a le devoir, de par son rôle au sein de l'institution, que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler (car sinon l'élève n'apprend pas) et cela est incompatible avec les attentes des élèves, car ceux-ci s'attendent à ce que l'enseignant leur donne le savoir (puisqu'ils savent qu'il le détient).

Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, l'élève se retrouve confronté à un milieu et, en fonction des rétroactions de ce milieu, il doit modifier ses actions et prendre des décisions lui permettant de trouver une solution au problème qui est proposé par l'enseignant.

Il existe de nombreuses situations relatives à un même savoir. Aussi, de nombreuses connaissances peuvent intervenir dans une décision. L'un des objectifs de la théorie des situations didactiques est de distinguer et de caractériser les différentes situations. La TSD distingue ainsi les situations selon leur phase (action, formulation, validation et institutionnalisation) laquelle détermine des types différents de connaissances et d'interactions. Les interactions d'un élève avec le milieu peuvent effectivement être classées en au moins trois grandes catégories (1998):

- *« Les échanges de jugements (ce qui renvoie aux situations de validation);*
- *Les échanges d'informations codées dans un langage (ce qui renvoie aux situations de formulation);*
- *Les échanges d'informations non codées ou sans langage : les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste (ce qui renvoie aux situations d'action) » (p. 98).*

Nous verrons que ces catégories sont emboîtées, « car un échange de jugements est un échange d'informations particulières, et celui-ci, un type particulier d'action et de décision » (1998, p. 98).

Les différentes interactions qui se déroulent entre les acteurs des situations constituent des formes de communication que la TSD permet de différencier, ce qui en fait une théorie d'autant plus pertinente

[38] Et cela peut amener l'enseignant vers une série d'effets didactiques décrits par Brousseau, notamment l'effet Jourdain et l'effet Topaze. Par souci de concision, nous ne décrirons pas formellement ces effets, mais y reviendrons au besoin dans l'analyse de nos résultats.

pour fonder notre recherche. Détaillons chacune des structures de la TSD (action, formulation, validation et institutionnalisation) en débutant par la situation d'action.

### *2.5.4 La situation d'action*

La situation d'action représente une :

> « […] situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire » (2010, p. 3).

Brousseau (1998) résume les conditions que devraient respecter les situations d'action:

- Elles s'insèrent dans un milieu a-didactique (donc sans interventions directes de l'enseignant au niveau de la connaissance);
- Dans la prise de décision, l'élève doit consciemment être en mesure de faire un choix parmi plusieurs possibilités;
- L'élève doit pouvoir perdre ou gagner à la situation. Il doit savoir comment arriver à gagner (il doit donc être en mesure d'identifier l'enjeu de la situation);
- L'élève doit aussi savoir les règles du jeu, mais elles ne doivent pas lui permettent dès le départ d'arriver à la stratégie gagnante;
- Pour passer d'une stratégie, à celle qui est la plus efficiente, l'élève doit nécessairement utiliser la connaissance mathématique visée;
- Les rétroactions du milieu a-didactique doivent permettre à l'élève de construire ses connaissances.

Dans le cadre d'une situation d'action, l'élève prend des décisions qui sont souvent implicites et pose une action sur le milieu. C'est au travers la recherche de stratégies que s'effectuent les prises de décisions et que l'élève construit sa solution à partir de modèles d'action qui peuvent être, par exemple, des calculs, des schémas, des régularités, etc. Les interactions qui peuvent être observées dans une situation d'action peuvent se faire « sans aucun codage linguistique » (Brousseau, 1998, p. 98). Dans une situation d'action, on peut supposer que l'élève reste davantage dans un discours pour lui-même. Les traces écrites de son raisonnement sont plus difficilement perceptibles et décodables pour autrui. Les mots et les phrases sont peu présents dans la solution de l'élève et même absents. Par contre, des traces écrites de calculs peuvent être présentes. En somme, on peut dire que la communication de la démarche de résolution du problème prend moins d'importance que la réponse au problème donné.

Le deuxième type de situation développée dans la TSD suit typiquement la situation d'action et vise à ce que l'élève prenne conscience des connaissances qui sont mobilisées dans l'action.

### *2.5.5 La situation de formulation*

La situation de formulation vise à ce que l'élève utilise le langage pour formuler les objets et les relations pertinentes de la situation. La situation de formulation vise à mettre en relation au moins deux actants avec un milieu qui interagissent autour de savoirs mathématiques qu'ils mettent en jeu dans le cadre de la résolution d'un problème. L'élève formule en quelque sorte le modèle implicite qui a régi son action. Dans la situation de formulation, de par ses actions sur le milieu, l'élève élabore des formes langagières sur ses actions pour un autre élève qui lui aussi agit sur le milieu. Le but de l'élève qui émet un message n'est pas d'agir sur son interlocuteur, mais bien d'agir sur le milieu. La situation de formulation donc :

> « […] exige que l'on formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu » (Brousseau, 2010, p. 3).

La formulation consiste pour les actants à utiliser un répertoire connu de connaissances pour formuler un message original, mais dans une situation qui peut conduire à modifier, via les interactions créées, ce répertoire de connaissances. On peut déduire qu'une formulation « spontanée » de connaissance exige que cette connaissance existe préalablement comme modèle implicite d'action chez les actants et alors la formulation permettrait d'expliciter ce modèle. Dans la situation de formulation, les messages échangés entre les protagonistes sont « codés dans un langage » (Brousseau, 1998, p. 98).

L'élève doit alors devenir conscient de ses actions et des stratégies qu'il met en œuvre dans le milieu proposé. Avec le langage naturel, oral ou écrit, il décrit les modèles de résolution qu'il a construits (précédemment) dans l'action. Il prend conscience de ses actions par la description, la formulation, l'explicitation qu'il cherche à en faire. Il peut même utiliser différents registres de représentations: tableau, graphique, dessins, etc. Brousseau (1998) mentionne trois éléments essentiels pour décrire une situation de formulation :

- le jeu de l'élève avec le milieu doit l'encourager à avoir un discours riche et pertinent;
- le jeu avec le milieu doit amener l'élève à un usage du langage mathématique;
- les messages produits doivent pouvoir être analysés entre les élèves.

Brousseau avance même qu'un résultat pédagogique de l'usage des situations de formulation est l'utilisation adéquate du langage mathématique (1998, p. 109) ce qui présente un apport important pour le développement de la communication.

### 2.5.6 *La situation de validation*

Dans une situation de validation, l'élève recherche la valeur de vérité des propositions et connaissances qui émergent du jeu sur le milieu. Brousseau (1998) fait alors référence à des « échanges de jugement » (p. 98). Ces échanges peuvent porter sur la validité sémantique, syntaxique ou pragmatique des énoncés en jeu. Les informations échangées peuvent prendre le statut de preuves, de démonstrations ou référer à des définitions. Tout comme dans la situation de formulation, l'échange nécessite un émetteur et un récepteur, mais ici les joueurs en jeu « s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu a-didactique qui sert de référent à ces messages d'autre part » (1998, p. 109).

La situation de validation se définit comme :

> […] une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation.
>
> Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et s'accordent selon les règles du débat scientifique. La réalisation d'une situation de validation dépend donc de la capacité des acteurs à établir ensemble explicitement cette validité (Brousseau, 2003, p. 4).

On perçoit donc que la situation de validation, tout comme la situation de formulation, revêt un grand potentiel de communication et d'interactions. Les élèves sont appelés à argumenter et à prendre position ensemble sur des problèmes ou sujets mathématiques. Ce genre de situation peut « aider le professeur à faire vivre dans sa classe une véritable petite société mathématique » (Brousseau, 1998, p. 112).

Concernant le contexte de la situation de validation, nous reprenons la question qui avait été posée par Leblanc (2011, p. 59) : « *[…] est-il possible pour un élève* <u>*seul*</u> *de se retrouver en situation de validation ou doit-il y avoir un deuxième joueur avec qui il peut débattre ?* »[39]. Leblanc réfère à Brousseau et Warfield (1999) et mentionne « qu'il est possible pour l'élève de se construire un « interlocuteur » intérieur avec lequel il peut débattre » (Leblanc, p. 59). De plus, Leblanc évoque les travaux de Mary (1999) qui propose d'autres types de validation où la présence d'un deuxième élève n'est pas nécessaire. Elle cite en exemple (Ibid., p. 59) « la validation à travers une vérification du travail accompli », voire une validation de sa propre solution, laquelle peut se faire en utilisant « une autre méthode, en changeant de référent, en utilisant un autre résultat ou en utilisant une information redondante ». Dans ce contexte, la validation est alors faite par l'élève ayant lui-même produit la preuve initiale dans le cadre de la situation de validation.

[39] Notre première réponse à cette question est de dire que l'élève est souvent en interaction avec son enseignant (pour produire une solution à un problème que ce dernier lui a proposé) et qu'il doit convaincre ce dernier de la validité des propositions qu'il avance. À cet égard, les deux protagonistes sont alors l'enseignant et l'élève.

### 2.5.7 *La situation d'institutionnalisation*

Le dernier type de situations de la TSD, se rapporte aux situations d'institutionnalisation d'une connaissance et est davantage sous la responsabilité de l'enseignant. Quand l'élève répond aux problèmes que son enseignant lui a proposés, il ne sait pas encore qu'il a produit une connaissance qu'il pourra transférer dans d'autres occasions (Brousseau, 1988). Avec le soutien de son enseignant, pour transformer les réponses et les connaissances en savoirs, l'élève doit décontextualiser le savoir qu'il produit afin qu'il puisse reconnaître dans ce « qu'il a fait quelque chose qui ait un caractère universel, une connaissance culturelle réutilisable » (Brousseau, 1988, p.1) ». Ce travail de l'enseignant s'appelle l'institutionnalisation.

Une situation d'institutionnalisation est :

> […] une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de validation, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives (Brousseau, 1998, p. 4).

On peut penser, pour représenter ce type de situations, à la résolution d'un problème qui peut devenir une procédure ou un algorithme attesté et que l'on transforme en savoir. Avant que l'on ait institutionnalisé la méthode, l'élève ne peut s'y référer. Devant un problème semblable, il doit à nouveau la produire. Après l'institutionnalisation, l'élève peut utiliser le savoir ainsi institué sans en redonner la démonstration. L'institutionnalisation comporte donc un changement de « convention entre les actants, une reconnaissance (justifiée ou non) de la validité et de l'utilité d'une connaissance, et une modification de cette connaissance – qui est encapsulée et désignée – et une modification de son fonctionnement » (Brousseau, 2003, p. 4).

Dans l'institutionnalisation, la proposition de l'élève :

> - « est valide et reconnue comme telle hors du contexte particulier de la situation présente;
> - servira dans d'autres occasions, encore non connues;
> - sera plus avantageuse à reconnaître et à utiliser sous sa forme réduite que de l'établir à nouveau;
> - sera acceptée directement par tous ou au moins par les initiés » (2003, p. 5).

Les situations d'institutionnalisation permettent à l'enseignant d'établir les rapports entre les comportements et les productions des élèves, d'une part, et le savoir savant, d'autre part. L'enseignant prend en compte les apprentissages des élèves et précise le savoir que tous doivent posséder tout en les amenant vers une prise de conscience du travail accompli et de celui qui reste à faire. Par l'institutionnalisation, l'enseignant reconnaît la légitimité de la connaissance de l'élève et lui confère un statut dans le savoir savant.

On voit donc qu'une distinction importante se dessine entre connaissance et savoir, cette distinction prenant tout son sens dans le cadre de la phase d'institutionnalisation. Précisons-la dans ce qui suit.

*2.5.7.1 Distinction entre les termes « savoir » et « connaissance »*

Conne (1992) donne le critère d'utilité pour séparer l'ordre du savoir de celui de la connaissance. L'utilité à laquelle fait référence Conne pour distinguer le savoir de la connaissance est liée au fait que le sujet reconnaît, le rôle actif que joue la connaissance dans la réalisation d'une situation. Ainsi :

> « […] pour lui [le sujet], le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation » (1992, p. 225).

Pour Conne, la connaissance devient un savoir quand le sujet identifie son utilité. Pour Laparra et Margolinas (2010), le savoir est une construction socio-culturelle qui vit dans la communauté des mathématiciens et :

> « […] qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle » (2010, p. 146).

Le savoir mathématique fait l'objet d'un consensus dans la communauté mathématicienne. Il est une construction sociale, ce qui le distingue de la connaissance (Jonnaert et al., 2004). Pour Jonnaert et al., les connaissances font partie du patrimoine cognitif de la personne : « [elles] ne sont plus seulement des constructions sociales comme le sont les savoirs, la personne les a construites à travers ses expériences, elles lui sont donc propres » (Jonnaert et al 2004, p. 681).

Les connaissances « ne sont pas acquises une fois pour toutes, elles sont temporairement viables, tant et aussi longtemps que la personne peut les utiliser et les adapter à différentes situations » (Jonnaert et al, 2004, p. 681). Dans un contexte d'enseignement et d'apprentissage, si l'on souhaite que l'élève mobilise ses connaissances à propos d'un savoir dans une situation donnée, il importe que la situation proposée fasse appel de manière quasi-incontournable à ces connaissances. On peut également faire constater les limites d'une connaissance. Il est alors possible de le faire par un milieu qui pourrait provoquer également un conflit au niveau de son usage. On peut par exemple penser à la connaissance d'un élève que « *le produit est toujours plus grand que chacun des multiplicateurs* », laquelle est valide dans le domaine des naturels non nuls. Or, cette connaissance n'est plus vraie lorsqu'on multiplie des fractions, toutes deux plus petites qu'un entier. Dans ce cas, le produit est plus petit que chacun des facteurs.

Par ailleurs, il existe un lien entre connaissance et savoir. En effet, lorsqu'un élève est dans un processus d'apprentissage à partir d'une situation mobilisant un ou des savoirs codifiés, il met en interaction ce savoir avec ce qu'il sait déjà à son propos, c'est-à-dire ses connaissances personnalisées par rapport à ce savoir. Par cette interaction, l'élève construit de nouvelles connaissances à propos du savoir codifié en adaptant ses connaissances plus anciennes qui deviennent alors des connaissances reconnues comme utiles.

Ces connaissances plus anciennes adaptées peuvent être reconnues comme utiles par l'élève, mais aussi admises utiles par l'enseignant qui leur conférera alors, par l'institutionnalisation, un statut de savoir. Le rapport entre connaissance et savoir codifié est que l'un modifie l'autre pour créer, « une connaissance personnelle et originale qui est, pour la personne, une synthèse de ses connaissances et de ce savoir codifié » (Jonnaert et al., 2004, p. 681).

Pour Brousseau (1990), le lien entre les savoirs et les connaissances à propos d'une même notion mathématique peut être construit à partir d'une famille de situations où la dite notion fonctionne comme une connaissance. Brousseau réfère alors à la typologie des situations et cite en ici exemple une situation d'action. Mais on peut aussi construire une famille de situations où la notion figure comme un savoir (une situation de validation par exemple) puisqu'apparaît alors « l'identification d'un besoin de connaissances et de la possibilité de le satisfaire par la communication du savoir correspondant » (Brousseau, 1990, p. 316). Ainsi, le lien entre la connaissance de l'élève et le savoir est explicite dans la mesure où l'élève établit une correspondance entre ce qu'il met en jeu dans l'action (par ses calculs, ses schémas, ses tableaux, etc.) et le savoir mathématique codifié puisqu'il doit valider ses actions et convaincre de la véracité de sa stratégie. Il est du rôle de l'enseignant de valider officiellement cette correspondance entre les connaissances de l'élève et le savoir savant par son institutionnalisation.

#### *2.5.8 Synthèse sur les types de situations dans la théorie des situations didactiques*

Pour résumer les types de situations de la TSD, il importe tout d'abord de rappeler qu'elles ne sont pas indépendantes. D'abord, concernant la situation d'institutionnalisation, elle peut tout aussi bien se rapporter à une situation d'action (l'enseignant souhaite institutionnaliser une procédure), à une situation de formulation (ce sont alors certains termes ou expressions mathématiques que l'enseignant souhaite conserver) ou à une situation de validation (dans ce contexte, les propriétés ou théorèmes mathématiques peuvent devenir partie intégrante du savoir savant).

De plus, il est possible de constater certains liens entre une situation d'action et une situation de formulation. En effet, les idées exprimées par l'élève en situation de formulation succèdent bien souvent à un travail d'action. Elles expriment les questions et les décisions qui émergent d'une situation d'action. Comme le précise d'ailleurs Brousseau (1998, p. 128), « la formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action : le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre ». Inversement, on peut également penser que la situation d'action est facilitée par une situation de formulation appropriée. L'action permettant une meilleure compréhension du problème et des constats mathématiques qui sont formulés.

Les situations de validation permettent également de confirmer ou d'infirmer un modèle implicite d'action, alors que les situations d'action constituent en elles-mêmes un modèle de validation implicite. Il existe également des allers-retours entre les situations de validation et de formulation. Dans le contexte d'une situation de validation, l'élève est appelé à argumenter pour établir sa preuve à partir d'énoncés, de pas de raisonnement, etc.

Si l'on souhaite plonger l'élève dans une situation donnée, il semble donc difficile de ne pas y repérer des éléments qui relèvent à la fois d'une situation d'action, de formulation ou de validation. Par contre, ce n'est pas parce qu'une situation est conçue comme une situation de validation, par exemple, qu'elle mène nécessairement l'élève à valider des connaissances mathématiques. L'enseignant peut s'attendre à une production de l'élève qui peut être distincte selon ce qui est perçu par l'élève et la production peut être différente des attentes de l'enseignant. Comme le mentionne Margolinas:

> « […] la situation vue par l'élève, et en particulier la finalité vue par l'élève peuvent être différentes de ce qui a été prévu dans une analyse a priori. Or, c'est la finalité vue par l'élève qui permet de comprendre la signification de ses actions » (1993, p. 162).

Ce n'est pas parce nous organisons une situation dans le but de faire formuler aux élèves une connaissance que cette formulation aura lieu. De même, ce n'est pas parce que l'on tente de plonger les élèves dans une validation qu'ils ne resteront pas dans l'action. Ces nuances sont importantes à mettre en évidence dans le cadre de la mise en place d'un dispositif visant à faire communiquer les élèves en classe.

Les situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation invitent, chacune à leur façon, à communiquer. Si la première se situe davantage dans l'ordre de la communication privée de l'élève, les situations de formulation et de validation, quant à elles, sollicitent des échanges oraux ou écrits (au service de l'apprentissage) entre les actants de la classe de mathématiques qui contribuent à construire le savoir mathématique. Les situations de formulation et de validation paraissent particulièrement importantes dans le contexte de la mise en place d'un outil didactique à développer pour favoriser la communication en classe. En effet, la situation de formulation, en plus de contribuer à la prise de conscience et à l'explicitation de connaissances par l'élève, offre à l'enseignant un accès aux connaissances de l'élève et lui donne un pouvoir d'action sur les connaissances que les élèves mettent en jeu. Les situations de validation, quant à elles, forcent l'élève à se justifier, voire à convaincre un interlocuteur de son raisonnement.

La communication que requiert l'institutionnalisation relève, pour sa part, généralement de l'interprétation que doit faire l'élève des propos de l'enseignant. Les situations d'institutionnalisation mettent en jeu la communication entre l'enseignant et l'élève et ce, afin de reconnaître explicitement la connaissance, donc le savoir, qui se dégage des situations précédentes.

Dans la théorie des situations didactiques, un savoir spécifique est en jeu. Les ingénieries développées sur la base de la TSD visent le développement de savoirs ciblés. Il est donc essentiel de proposer des situations spécifiques à un savoir, c'est-à-dire dont la résolution nécessite autant que possible l'émergence des connaissances relatives au savoir mathématique que l'on souhaite développer.

### 2.6 Précisions des objectifs et questions de recherche

Nous nous demandions à la fin du premier chapitre *comment organiser un enseignement de manière à favoriser et à faciliter une communication en classe (utile et nécessaire) à l'apprentissage des mathématiques ?* Cette question découlait de la présentation de plusieurs difficultés constatées, tant de notre point de vue de praticien que de celui de chercheurs, quant à l'exploitation de la communication en classe de mathématiques. Nous avons vu par ailleurs des apports potentiels liés à l'exploitation de la communication et aux interactions en classe. Ces apports semblent prometteurs, non seulement pour les élèves mais aussi pour l'enseignant.

Le cadre théorique retenu pour fonder l'organisation d'un enseignement est celui de la TSD. Cette théorie modélise les interactions entre l'enseignant, l'élève et le milieu à travers un ensemble de situations didactiques. Ainsi, une séquence didactique inspirée de la mise en œuvre de situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation risque alors de solliciter une communication riche au sein de l'activité mathématique, et cette communication pourrait permettre un accès privilégié à l'enseignant aux connaissances des élèves.

L'objectif général qui se dégage est alors de concevoir et mettre à l'essai une séquence de situations engageant un travail de communication afin d'analyser la richesse de la communication déployée et ses impacts, tant auprès des élèves que des enseignants. Pour atteindre cet objectif, il apparaît nécessaire :

- de sélectionner et d'adapter des situations visant à favoriser un travail de communication au sein de l'activité mathématique et de les mettre à l'essai;
- d'analyser le travail de communication déployé par les élèves dans la mise en œuvre des situations développées;
- d'analyser les productions de communication écrite qui apparaissent utiles à l'enseignant dans ses interactions avec les élèves pour les aider à apprendre.

Ainsi, la première étape de la recherche consiste à sélectionner et adapter des situations et à en faire l'analyse a priori en posant des hypothèses quant aux effets possibles des valeurs des variables didactiques retenues sur l'activité mathématique certes, mais surtout sur la communication des élèves. Par la suite, la mise à l'essai de ces situations visera à répondre aux questions suivantes

**Q1 :** *Les situations de la séquence conçue sollicitent-elles une communication mathématique riche et pertinente de la part des élèves ?*

Cette question vise à faire l'analyse a posteriori de l'activité mathématique et de communication et à voir si les hypothèses posées a priori dans la conception de la séquence de situations se confirment. En d'autres termes est-ce que les éléments de communication visés se sont avérés. Plus précisément, il s'agit de répondre aux questions suivantes :

***Q1.1*** *: Est-ce que les situations ont sollicité une activité mathématique de la part des élèves?*

***Q1.2*** *: Comment les élèves ont-ils communiqué dans leurs productions mathématiques? Certaines valeurs de variables semblent-elles avoir favorisé la richesse de leur communication ?*

**Q2 :** *Y a-t-il des éléments de communication laissés par les élèves, à la suite de leurs interactions dans les situations proposées, qui n'avaient pas été anticipés par l'enseignant et qu'il a exploités lors des retours avec les élèves ? Si oui, comment sont-ils exploités? Peut-on dégager des apports didactiques de cette exploitation?*

Plus précisément, il s'agira de répondre aux sous-questions suivantes :

***Q2.1 :*** *Quels sont les stratégies, les raisonnements, les erreurs ou conceptions erronées et les autres éléments communiqués par les élèves qui font l'objet d'un retour et qui n'avaient pas été anticipés par l'enseignant ?*

***Q2.2 :*** *Est-ce que les retours sur certaines situations ont amené l'enseignant à dévoluer davantage d'espace aux élèves, à les placer davantage en position de recherche plutôt qu'en position d'attente ? Dans l'affirmative, peut-on faire des liens avec des valeurs de variables ?*

### *2.6.1 Pertinence scientifique et sociale de la recherche*

Cette thèse souhaite contribuer à enrichir les connaissances didactiques à propos de situations de communication mathématique en classe. Cette contribution pourra se faire à travers l'identification de variables didactiques susceptibles d'avoir une influence sur la communication des élèves de même que par la documentation de l'effet des valeurs de ces variables sur l'activité déployée. De plus, puisque la relation didactique qui se tisse entre l'enseignant et les élèves risque de se voir teintée par cette activité, l'effet potentiel de certaines valeurs sur les interactions qui se déroulent au sein de la situation didactique sera aussi examiné. Nous verrons, par exemple, que le caractère a-didactique de la situation peut être favorisé par certaines valeurs. Ces résultats pourraient être utiles pour concevoir des situations exportables dans d'autres contextes de classe afin de favoriser et développer la communication en classe de mathématiques.

La pertinence sociale de cette recherche repose, entre autres, sur la possibilité qu'elle offre d'identifier des leviers pour l'enseignant afin de favoriser la prise de parole (tant dans sa forme orale qu'écrite) des élèves en classe. Cette prise de parole est d'autant plus importante dans les milieux défavorisés puisqu'elle permettrait de diminuer les inégalités scolaires et sociales. En effet, en milieux défavorisés, des recherches[40] montrent que les parents des élèves moins bien nantis les invitent à poser moins de questions en classe, voire à ne pas déranger, à s'effacer. Or, l'enseignant a besoin de connaître les difficultés de tous ses élèves pour mieux les soutenir. Il y a donc assurément un intérêt à expérimenter un dispositif qui cherche à mieux comprendre les défis de la communication en classe de mathématiques pour les surmonter, d'une part, mais, aussi, d'autre part, pour analyser comment l'enseignant peut efficacement favoriser les interactions avec les élèves, particulièrement les élèves issus des milieux défavorisés. À défaut de quoi, si on ne favorise pas la prise de parole des élèves issus des milieux défavorisés, on creuse encore les écarts de réussite et on n'enseigne pas dans une perspective d'équité et de justice sociale.

Le prochain chapitre présente la méthodologie utilisée pour répondre aux questions de recherches.

[40] Élèves de milieux défavorisés : « assieds-toi et tais-toi! »

# CHAPITRE 3
# MÉTHODOLOGIE

## 3.1 Organisation générale du dispositif expérimental

La recherche vise à sélectionner et adapter un ensemble de situations[41] susceptibles de solliciter une communication mathématique de la part des élèves puis à les mettre à l'essai afin d'observer d'une part, le travail de communication effectif des élèves au sein de l'activité mathématique et, d'autre part, d'apprécier dans quelle mesure les interactions produites dans les situations sont exploitées par l'enseignante[42].

Le choix du contenu mathématique de même que celui des valeurs de variables à partir desquelles seront créées les situations sont essentiels et ils constitueront la majeure partie de ce chapitre. Nous verrons aussi que, afin de vérifier que ces situations présentent bien un potentiel de communication mathématique, elles ont été soumises à une phase de préexpérimentation[43] conduisant à un ajustement des situations. Les situations ajustées sont par la suite expérimentées auprès de deux classes d'élèves de 2[e] secondaire d'une école de l'ouest de l'île de Montréal.

Pour le traitement des données recueillies, une grille d'analyse des éléments de communication laissés par les élèves a été développée puis testée et ajustée lors de la préexpérimentation. Les principaux éléments théoriques ayant conduit à la construction de cette grille ont été présentées au chapitre précédent. Le processus itératif qui a mené à l'amélioration de la grille finale, quant à lui, sera présenté en partie dans ce chapitre et dans l'annexe 4 en même temps que la préexpérimentation.

Le tableau 3 donne les grandes lignes de l'expérimentation en précisant les buts de chacune des phases et les données recueillies. L'intention de ce tableau est d'avoir une vue d'ensemble de l'expérimentation pour faciliter la lecture de la méthodologie. Les éléments contenus dans le tableau 4 sont détaillés au fur et à mesure du chapitre.

---

[41] Dans la suite de la thèse, le terme « situation » est utilisé au sens de la TSD présenté précédemment soit « l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution » (Brousseau, 1986, p. 155). Parfois, nous évoquerons le « problème X » pour parler du problème mathématique (format papier), mais la plupart du temps, nous référerons à la « situation X » qui, elle, est plus englobante.
[42] Mentionnons que, comme c'est une enseignante qui a expérimenté les situations avec ses élèves, nous référons dès à présent à une enseignante.
[43] Cette préexpérimentation ne sera pas présentée en détails dans ce chapitre, mais elle est résumée à l'**annexe 4**. Ce choix a été fait par souci de concision, mais aussi pour éviter toute forme de confusion avec l'expérimentation, laquelle sera détaillée dans ce chapitre.

*Tableau 3 - Les grandes étapes de la méthodologie*

| Étapes | Buts de l'étape | Cueillette de données |
|---|---|---|
| **Conception** initiale d'une famille de six situations. | - Sélectionner et adapter des situations algébriques ayant un potentiel d'activité mathématique et de communication à partir de choix initiaux de variables didactiques.<br>- Varier l'enjeu de communication d'une situation à l'autre pour le rendre plus exigeant. | Six situations de type papier-crayon dont les titres sont : *Les Allumettes*, *La Magicien, L'Enseignan*t, *La Balance, Le Déménagement* et *Les Équations*. |
| **Préexpérimentation** des situations auprès d'élèves de 3e secondaire.<br>Préexpérimenter une grille d'analyse préliminaire de l'activité mathématique et de communication. | - Tester le potentiel d'activité mathématique et de communication des situations.<br>- Améliorer et ajuster les situations.<br>- Contre-coder (chercheur et sa directrice) des copies-types de sujets pour peaufiner une grille finale d'analyse des éléments de communication en assurant une validité des critères. | - Des solutions écrites d'élèves pour les six situations.<br>- Des solutions écrites de dyades d'élèves pour deux des situations réalisées en équipes : *Magicien* et *Déménagement*.<br>- Les cotes attribuées par le chercheur et sa directrice sur des critères initiaux. |
| **Expérimentation** des situations améliorées dans deux classes de 2e secondaire d'une école de l'ouest de l'île de Montréal.<br>Au niveau de la séquence d'exploitation des situations, les étapes suivantes sont suivies:<br>*1. l'enseignante présente la situation : précise le temps et les modalités de travail;*<br>*2. les élèves réalisent la situation individuellement ou en dyades et laissent des traces écrites;*<br>*3. pendant la réalisation de la situation, l'enseignante interagit avec les élèves (répond aux questions, rappelle à l'ordre certains élèves, etc.);*<br>4. *lors du cours suivant, l'enseignante, après avoir pris connaissance des écrits des élèves, fait un retour avec le groupe-classe sur la situation.* | Mettre à l'épreuve les situations en vue :<br>1- d'analyser le travail de communication déployé par les élèves dans la mise en œuvre des situations développées; | - Les productions écrites des élèves à chacune des situations;<br>- Des extraits audios des interactions de trois équipes (dyades forte, moyenne et faible) lors de deux situations;<br>- Le journal de bord tenu par le chercheur. |
| | 2- d'analyser les productions de communication écrite qui apparaissent utiles à l'enseignant dans ses interactions avec les élèves pour les aider à apprendre. | - Une entrevue préliminaire de l'enseignante responsable des deux groupes à l'étude<br>- Les séances filmées du retour de chacune des situations;<br>- Le journal de bord tenu par l'enseignante;<br>- Le journal de bord tenu par le chercheur. |

### *3.1.1 L'orientation méthodologique: une recherche-développement*

L'orientation méthodologique globale de la recherche se situe principalement dans le cadre d'une recherche développement à caractère exploratoire. Legendre définit la recherche développement comme « une recherche visant, par l'utilisation des connaissances scientifiques et des données de la recherche, à produire des objets ou des procédés nouveaux » (1993, p. 1077). Van der Maren, quant à lui, mentionne que la recherche développement d'objet suit le cheminement classique de la résolution de problème (1996). Pour leur part, Harvey et Loiselle considèrent la recherche développement comme :

> « […] l'analyse du processus de développement de l'objet (matériel pédagogique, stratégies, modèles, programmes) incluant la conception, la réalisation et les mises à l'essai de l'objet, en tenant compte des données recueillies à chacune des phases de la démarche de recherche et du corpus scientifique existant.
>
> L'analyse du processus de développement poursuit alors un double but : elle vise à mieux adapter le produit développé aux finalités poursuivies et à dégager de l'ensemble des décisions prises dans le processus de développement celles qui paraissent les plus prégnantes à la lumière des données recueillies » (2007, pp. 44-45).

Notre recherche vise à développer un objet, soit une famille de six situations de communication en mathématiques, à partir de problèmes existants, et ce, en suivant sensiblement le processus décrit par Harvey et Loiselle. En effet, référant au corpus scientifique, la problématique montre que la communication est difficilement actualisable dans les classes, même pour des enseignants qui souhaitent développer cette compétence avec leurs élèves. De plus, elle montre aussi plusieurs apports de son exploitation, tant pour l'élève que pour l'enseignant. Ainsi, pour offrir des outils qui favorisent la communication en mathématiques et qui sont utilisables par les enseignants, notre recherche vise à développer une famille de situations de communication, en fonction de variables clairement identifiées et pour lesquelles chaque situation est porteuse de valeurs différentes. L'analyse a priori permettra de montrer les choix de variables faits et comment les différentes valeurs de variables choisies amènent une gradation dans l'exigence de communication. Elle servira d'appui, à la suite de l'expérimentation pour « dégager de l'ensemble des décisions prises dans le processus de développement celles qui paraissent les plus prégnantes à la lumière des données recueillies » (Harvey et Loiselle, p. 45).

La famille de situations de communication est d'abord préexpérimentée, des données sont recueillies afin d'ajuster s'il y a lieu les situations. Elle est ensuite mise à l'épreuve par une enseignante auprès de deux groupes d'élèves afin de voir si elle produit l'activité attendue.

Le caractère exploratoire tient au fait que les situations sont expérimentées afin de générer des hypothèses quant à l'effet des valeurs des variables didactiques sur la communication mathématique déployée par les élèves, hypothèses qui pourraient être validées auprès d'un plus grand échantillon.

### *3.1.2 Une recherche-développement fondée sur une ingénierie didactique*

L'ingénierie didactique a été développée pour pallier les méthodologies externes à la classe qui se révélaient insuffisantes pour appréhender la complexité du système étudié. Cette méthodologie de recherche étudie des réalisations didactiques, soigneusement conçues, qui sont mises à l'épreuve en classe. L'ingénierie didactique se situe « dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori » (Artigue, 1988, p. 286). Il s'agit d'« affirmer la possibilité d'une action rationnelle sur le système basée sur des connaissances didactiques préétablies » (Artigue, p. 285).

Les objectifs d'une recherche d'ingénierie didactique peuvent être divers. Douady (1987, rapporté dans Artigue, 1988) « distingue par exemple les recherches qui visent l'étude des processus d'apprentissage d'un concept donné et donc en particulier l'élaboration de genèses artificielles pour un concept donné, de celles qui sont transverses aux contenus, même si leur support est l'enseignement d'un domaine précis » (p. 286).

Artigue (1988) définit l'ingénierie didactique en quatre phases :

1- Les <u>analyses préalables</u>, qui comprennent notamment « l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement, 1'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets, l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution, l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective, et bien sûr en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche » (Artigue, pp. 287-288).

2- <u>La conception et l'analyse a priori de situations didactiques</u> : c'est dans cette phase que le chercheur prend des décisions sur un certain nombre de variables de commande qu'il juge pertinentes pour l'étude des questions de recherches qu'il a déterminées. Par l'analyse a priori, il tente de déterminer en quoi les choix des valeurs de ces variables risquent d'influencer le comportement des élèves.

3- <u>L'expérimentation :</u> cette phase permet le recueil de données permettant de répondre aux questions de recherches.

4- <u>L'analyse a posteriori et l'évaluation :</u> cette phase s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation. Ces données peuvent être complétées par des données obtenues par l'utilisation de méthodologies externes[44]. Il s'agit de confronter les analyses a priori et a posteriori afin de valider les hypothèses.

[44] Dans notre cas, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, par exemple, sur une pré-entrevue avec l'enseignante.

La présente recherche-développement qui s'intéresse à la communication en mathématiques s'appuie sur l'ingénierie didactique. Dans notre cas, bien que la réalisation didactique porte sur un contenu mathématique, ce qu'il nous importe d'observer, de manière aussi rationnelle que possible, c'est le travail de communication que seront à même de susciter les situations développées. Notre étude vise donc un sujet transversal aux savoirs mathématiques, soit la communication.

Ainsi, des analyses préalables ont été réalisées dans la problématique et le cadre théorique où une analyse du développement de la communication et de ses effets sur l'apprentissage des mathématiques a été présentée. Des obstacles rencontrés par les enseignants pour solliciter un travail de communication de même que des difficultés des élèves à communiquer ont été mis en évidence. Aussi, la communication a été définie et ses apports pour l'enseignement ont été présentés.

Par la suite, comme nous le verrons bientôt, des situations qui sollicitent un travail de communication de la part des élèves sont développées à partir de variables didactiques choisies et font l'objet d'une analyse a priori de leur potentiel de communication, répondant ainsi à la deuxième phase de l'ingénierie didactique.

Les situations développées sont expérimentées avec deux groupes d'élèves et les données recueillies sont analysées afin de comparer les résultats avec ce qui a été anticipé lors de l'analyse a priori. La confrontation entre les deux analyses devrait permettre de valider les hypothèses quant à la richesse de la communication déployée par les élèves en fonction des valeurs des variables et ainsi nous permettre de répondre aux questions de recherche.

La prochaine section présente les choix effectués pour concevoir les situations.

### 3.2 Les choix effectués pour concevoir les situations

La recherche cherche à observer la communication au travers des situations transférables dans la pratique, créées et expérimentées, pour faire émerger des caractéristiques de situations qui sollicitent des interactions utiles au travail des enseignants.

Pour cela, le besoin d'adapter des situations apparaît évident. Le cadre théorique a permis de cibler plusieurs éléments à prendre en considération dans l'élaboration de situations visant à faire émerger une communication en mathématiques. Ces éléments se traduiront en choix et en variables pour la conception des situations. Ces choix et les variables concernent, d'une part, l'activité mathématique en jeu et, d'autre part, la communication à solliciter.

### *3.2.1 L'algèbre, un choix pertinent pour concevoir les situations*

Le but de la conception de la famille de situations est de favoriser une communication au service d'une réelle activité mathématique. Pour ce faire, il importe de choisir un domaine mathématique qui se prête bien à un tel exercice. Le choix s'est arrêté sur l'algèbre, et ce, pour différentes raisons.

Tout d'abord, l'algèbre est un sujet crucial pour l'enseignement des mathématiques. Les élèves sont dans une étape charnière dans leur apprentissage de l'algèbre en 2e secondaire puisque le langage symbolique est introduit plus formellement[45], mais il est aussi ensuite utilisé pour la poursuite des études aux autres niveaux d'enseignement.

L'algèbre est aussi un domaine difficile pour les élèves. En effet, plusieurs études montrent de nombreuses difficultés dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, entre autres celles liées à la transition arithmétique-algèbre (Chevallard, 1989; Schmidt, 1994; Bednarz, 1994; Coulange, 2001; Adihou, 2003), à la résolution d'équations (Filloy et Rojano, 1989; Vlassis et Demonty; 2000), à la manipulation d'expressions algébriques (Booth, 1984; Radford et Grenier, 1996) et à la résolution de problèmes (Bednarz, Janvier, Radford et Lepage, 1992; Bednarz et Janvier, 1996). Les difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre soulèvent la question des moyens à mettre en place pour contribuer au développement du raisonnement algébrique des élèves et justifient de concevoir et mettre à l'essai des situations qui cherchent à soutenir les enseignants dans l'enseignement de ce champ mathématique.

Par ailleurs, le recours que font les élèves à différents registres dans leurs raisonnements permet de mieux comprendre les stratégies utilisées et cela est d'autant plus éloquent si les situations visent à faire communiquer les élèves sur des savoirs algébriques. En effet, en 2e secondaire, la « nouveauté » du domaine algébrique amène les élèves dans une exploration d'une autre forme de langage avec ses normes et conventions. L'élève est dans une sorte de passage entre le langage naturel et arithmétique et le langage algébrique. Au début de l'apprentissage, le langage algébrique peut être plus ou moins maîtrisé et donc disponible pour l'élève. Ainsi, l'élève peut avoir recours à plusieurs registres de représentation qui peuvent alors être mis à contribution et amalgamés dans la communication de ses raisonnements. Par exemple, il peut communiquer en mots une opération algébrique de manière à en expliquer le sens. Cette communication peut aider l'enseignante à mieux saisir la pensée de l'élève et, ainsi, à offrir une rétroaction plus adaptée.

[45] Il faut noter qu'en 1re secondaire, les élèves sont déjà confrontés à des problèmes où ils doivent dégager une régularité ou trouver une règle dans des problèmes numériques. Toutefois, ils ne sont pas encore initiés au discours formel avec des symboles algébriques.

Pour l'élève, l'algèbre, au fur et à mesure de son apprentissage, deviendra un outil efficace pour communiquer en mathématiques. C'est un outil facilitant l'expression de la justification qui pourrait peut-être amener l'élève à être plus « parlant ». L'algèbre, étant un langage qui permet une transcription synthétique des relations entre des variables, elle outille la validation et contribue à la clarté et à l'organisation du discours.

Ainsi, l'algèbre étant notamment un outil pour mettre en équations des énoncés de problèmes mathématiques, le choix est fait de développer une série de trois situations qui demande à l'élève d'interpréter un contexte pour en dégager une règle mathématique ou une régularité et donc, de travailler principalement la mise en équation. Les trois autres situations concernent la résolution d'équations algébriques. La prochaine section présente plus spécifiquement les choix de savoirs algébriques faits pour concevoir les problèmes qui sont au cœur des situations.

*3.2.2 Les choix des savoirs algébriques pour concevoir les situations*

Dans un souci de concevoir des situations adaptées à l'enseignement au secondaire, les documents officiels produits par le Ministère de l'éducation du Québec (2016) servent de référence quant aux savoirs algébriques à mobiliser. Il importe en effet que les savoirs algébriques des situations puissent s'arrimer à la planification de l'enseignante de manière à lui permettre d'avancer dans son enseignement.

Dans la *progression des apprentissages* (Ministère, 2016), des visées sont spécifiées au regard de certains concepts et processus[46] à développer par les élèves à chaque année. Cette progression sert souvent de guide aux enseignants et nous l'avons donc prise en compte dans la conception des situations.

Ainsi, les trois premières situations abordent principalement les savoirs *« Construire une expression algébrique à partir d'un registre (mode) de représentation »* et « *Reconnaître ou construire des relations ou des formules* ».

Les trois autres situations sont construites à partir des savoirs principaux :

- *Reconnaître ou construire des égalités et des équations*
- *Reconnaître ou construire des expressions algébriques équivalentes*
- *Reconnaître ou construire des relations ou des formules*
- *Manipuler des relations ou des formules (ex. : isoler un élément)*
- *Utiliser différentes méthodes pour résoudre des équations du premier degré à une inconnue se ramenant à la forme ax + b = cx + d : essais systématiques, dessins, méthodes arithmétiques*

[46] Il s'agit ici du terme utilisé par le Ministère. Rappelons que dans le cadre de cette thèse, nous préférons utiliser le terme « savoir ». Voir à cet effet la note de bas page **suivante**.

*(opérations inverses ou équivalentes), méthodes algébriques (méthodes de l'équilibre ou du terme caché)*

Il apparait pertinent de travailler la mise en équations dans les trois premières situations, notamment parce qu'elle ne s'enseigne pas facilement. En effet, comme le souligne René de Cotret : « […] bien que la mise en équation existe comme objet d'enseignement, il ne semble pas y avoir de savoir s'y rapportant ayant un statut culturel en mathématique » (2000, p. 31). Cette absence de savoir en rend l'enseignement et l'apprentissage difficiles. Ainsi, le travail de la mise en équations à partir de situations de communication devient intéressant puisqu'il permet de mieux saisir ce que les élèves en comprennent et de leur offrir des occasions de questionner le sens du codage et du décodage des équations.

L'enseignement de la résolution d'équations du premier degré est tout aussi important. La résolution d'équations algébriques repose quant à elle sur des techniques. La maîtrise des techniques sous-jacentes à la résolution est essentielle, mais ces techniques nécessitent aussi une compréhension approfondie des différents savoirs mathématiques qui les autorisent. Plusieurs erreurs commises par les élèves sont souvent dues à une interprétation erronée des notions enseignées (Demonty et Vlassis; 2000), notamment au sens accordé à la lettre et au sens de l'égalité. Vlassis et Demonty (2000) ont d'ailleurs montré que, devant la question demandant de montrer que 3 est la solution de l'équation « $17 + 2x = 9x + 4$ », 65% des 1000 sujets de leur étude résolvaient à nouveau l'équation, perdant ainsi de vue le sens de l'égalité représentée par l'équation. Les autres élèves (35%) substituent quant à eux la valeur de 3 dans l'équation pour vérifier l'égalité, démontrant ainsi une meilleure compréhension du sens de l'égalité.

Pour le sens accordé à la lettre, citons les travaux de Booth (1984) qui note deux principales difficultés au sujet de la signification des lettres. D'une part, des élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets (« A » représente « Amélie » plutôt que, par exemple, « le nombre de livres lus par Amélie »). D'autre part, parmi ceux croient que la lettre correspond bien à un nombre, certains lui attribuent une valeur définie (comme dans une équation de la forme « $x + 3 = 5$») plutôt qu'un ensemble de valeurs possibles comme dans une équation du type « $x + y = y + x$ ».

En somme, inviter des élèves à résoudre des problèmes algébriques au cœur de situations de communication permet, d'une part, la mise en équation au cours de laquelle l'énoncé est traduit en respectant les règles d'écriture algébrique et, d'autre part, la résolution d'équations qui implique l'application de règles formelles. Ce travail sémantique et syntaxique offre à l'enseignante un accès aux conceptions des élèves et lui permet d'interagir pour les faire progresser dans leur apprentissage de l'algèbre.

Le tableau suivant (tableau 4) offre une vision d'ensemble des savoirs travaillés dans chacune des situations à partir de la progression des apprentissages.

Dans ce tableau :

- La section verte regroupe tous les savoirs mathématiques en lien avec l'algèbre issus de la progression des apprentissages du Ministère (2016, pp. 14 à 20).
- Les six autres colonnes ont pour étiquettes les noms des situations qui seront présentées dans la prochaine section;
- Lorsqu'une case est marquée d'un « X » rouge, le savoir mathématique est prédominant dans la situation. Si le « X » est noir, le savoir est présent, sans pour autant être dominant;
- Le jaune et l'orangé indiquent respectivement les savoirs dominants qui sont communs aux trois premières situations (jaune) et aux trois dernières (orangé).

*Tableau 4 - Savoirs algébriques travaillés dans les six situations*

| **Savoirs qui sont attendus de l'élève au regard de la PDA pour le programme de 2e secondaire en algèbre** | Attentes du programme | (1) Allumettes | (2) Magicien | (3) Enseignant | (4) Balance | (5) Déménagement | (6) Équations |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique, des régularités numériques | À réinvestir | X | | X | | | |
| Décrire, dans ses mots et à l'aide du langage mathématique, des suites de nombres et famille d'opérations | | X | | X | | | |
| Ajouter de nouveaux termes à une suite dont au moins les trois premiers termes sont donnés | | X | | X | | | |
| Construire une expression algébrique à partir d'un registre (mode) de représentation | À maîtriser | X | X | X | X | X | |
| Interpréter une expression algébrique selon le contexte | | | X | | X | X | |
| Reconnaître ou construire des égalités et des équations | | X | X | X | X | X | X |
| Reconnaître ou construire des expressions algébriques équivalentes | | | | X | X | X | X |
| Calculer la valeur numérique d'expressions algébriques | | X | | X | | X | X |
| Effectuer les opérations suivantes sur des expressions algébriques avec ou sans l'aide de matériel concret ou imagé: addition et soustraction, multiplication et division par une constante, multiplication de monômes du premier degré | | X | X | X | X | X | X |
| Effectuer des mises en évidence simples d'expressions numériques (distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction) | | | | | | X | X |
| Reconnaître si une situation peut se traduire par une équation | | X | X | X | X | X | |
| Reconnaître ou construire des relations ou des formules | | X | X | X | X | X | X |
| Manipuler des relations ou des formules (ex. : isoler un élément) | | X | X | X | X | X | X |
| Représenter une situation à l'aide d'une équation du premier degré à une inconnue | | X | X | X | X | X | |
| Représenter une équation à l'aide d'un autre registre (mode) de représentation, au besoin | | | X | X | X | X | |
| Déterminer le terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) | À réinvestir | | | X | X | X | X |
| Transformer des égalités arithmétiques et des équations pour en conserver l'équivalence (propriétés et règles de transformation) et justifier les étapes suivies, au besoin | À maîtriser | X | X | X | X | X | X |
| Utiliser différentes méthodes pour résoudre des équations du premier degré à une inconnue se ramenant à la forme ax + b = cx + d : essais systématiques, dessins, méthodes arithmétiques (opérations inverses ou équivalentes), méthodes algébriques (méthodes de l'équilibre ou du terme caché) | | X | X | X | X | X | X |
| Valider une solution, avec ou sans outils technologiques, notamment par substitution | | | | | X | X | X |
| Interpréter des solutions ou prendre des décisions au besoin, selon le contexte | | X | X | X | X | X | |
| Analyser des situations à l'aide de différents registres (modes) de représentation | | X | | X | X | X | X |

La prochaine sous-section explique le choix d'engager les élèves dans une communication écrite par des situations de type « papier-crayon ».

### *3.2.3 Le choix de prioriser la communication écrite dans la réalisation des situations*

Nous avons choisi de proposer aux élèves des problèmes dont la résolution devra se faire par écrit. Les travaux de Rausher (2006) ont en effet montré que la communication écrite intervient souvent à la fin de l'activité mathématique des élèves simplement pour fournir le résultat, privant ainsi les élèves d'occasions de prises de conscience en cours de résolution. L'auteur mentionne que les écrits ont une place de plus en plus reconnue dans le processus de développement des connaissances mathématiques. Rauscher souligne que la communication écrite exige une véritable réorganisation de la pensée et de l'argumentation de la part de celui qui rédige. Elle est plus exigeante pour l'élève que la communication orale, puisqu'elle force à une structure et une synthèse des idées. Bien souvent aussi, l'interlocuteur n'a plus accès à celui qui a écrit d'où l'importance que la communication écrite soit claire et complète. Les problèmes[47] proposés aux élèves sont donc de type papier-crayon. Ce choix a été fait aussi en considérant que la communication entre les élèves et l'enseignant passe généralement par l'échange de productions écrites dans la pratique. Puisque la préoccupation est de documenter les caractéristiques des situations qui favorisent une communication en classe, il est pertinent de ne pas trop s'éloigner de la pratique des enseignants.

Par contre, les potentialités de l'usage des interactions orales en classe ayant été montrées dans le cadre théorique, une attention est aussi portée aux interactions orales dans le cadre de l'expérimentation des situations tel que nous le verrons plus loin.

## 3.3 Les variables didactiques des situations liées à la communication mathématique

Le choix des variables didactiques qui président à la conception des situations, de même que celui des valeurs attribuées à ces variables, est fondamental si l'on veut obtenir des situations susceptibles de solliciter une communication mathématique riche. Plus particulièrement, nous cherchons à déterminer des variables dont les valeurs inciteront les élèves à argumenter puisque, comme nous l'avons mentionné à la **section 2.4**, une argumentation qui tend vers la mise en place d'une justification ou d'une validation qui s'appuient sur des savoirs mathématiques adéquats et partagés par la communauté témoigne notamment d'une communication riche.

Nous avons donc déterminé cinq variables susceptibles de modifier l'exigence de communication qui sera sollicitée de la part des élèves : le genre de tâches; la position attribuée à l'élève; l'interlocuteur de l'élève; les registres de représentation utilisés dans l'énoncé du problème écrit; et les

[47] Nous référons bien ici au milieu matériel.

modalités de travail de la situation. Le jeu sur les valeurs de ces cinq variables vise ainsi à augmenter l'exigence de communication c'est-à-dire à solliciter une communication plus riche, donc plus axée sur les critères retenus pour définir la richesse, soit principalement l'argumentation et, dans une moindre mesure, l'organisation.

Les variables retenues, leurs valeurs de même que l'exigence de communication correspondante anticipée sont présentés dans le tableau suivant (tableau 5). Les descriptions des valeurs des variables de communication témoignent d'exigences différentes, par exemple, « expliquer » apparaît plus exigeant en termes de richesse de la communication demandée que « résoudre ». En effet, lorsque l'on demande à l'élève de résoudre un problème, il lui est possible de présenter une production ostensive qui ne rende compte que des actions posées. Cela ne signifie pas que l'élève n'a pas pu, par ailleurs, déployer une activité de communication plus importante. Toutefois, la demande qui lui est faite peut être satisfaite sans qu'une communication très riche ne soit mise en oeuvre. En d'autre termes, il est possible de répondre à la demande « résoudre », sans avoir à rendre compte d'une communication riche. Cela devient plus difficile lorsqu'il s'agit de répondre à une demande d'explication, puisque l'argumentation apparait davantage requise.

Ainsi, les valeurs « résoudre » et « dégager », de la variable genre de tâches, ne sont pas tout à fait de la même nature que les autres valeurs de cette variable. En effet, les valeurs « résoudre » et « dégager » ne sont pas des demandes qui sont directement liées à la mise en évidence de la communication effectuée. Toutefois, elles peuvent lui être préalables ou lui servir de matériau de base et, selon la demande faite à l'élève, la communication qui pourra en découler sera différente. Par exemple, on peut penser que l'exigence de justification liée à une communication à propos d'une résolution (ou d'une solution produite) sera moindre que celle liée à une communication à propos d'une propriété dégagée.

Par ailleurs, lorsque l'on propose à l'élève des situations où les tâches demandant de commenter, de formuler ou d'expliquer, l'élève ne peut se contenter de produire une solution. On cherche à l'amener à se distancer de la solution pour aller vers une validation de celle-ci. Ce jeu sur les valeurs des variables vise à faire émerger une communication différente d'une valeur de variable à l'autre et à jouer sur la richesse de la communication qui est exigée.

*Tableau 5 - Variables de l'activité de communication mathématique et valeur des variables et exigence de communication anticipée correspondante*

| Variables de l'activité de communication mathématique | Valeurs des variables et exigence de communication anticipée correspondante |
|---|---|
| **Genre de tâches**<br>La variable « genre de tâches » est assez proche de ce qui est entendu par cette expression dans la TAD, puisque l'objet mathématique sur lequel les tâches portent n'est pas spécifié. Cet objet est précisé dans les différentes situations. | *Résoudre :* présentation de la solution effectuée<br>*Décoder :* décoder une solution donnée<br>*Commenter :* porter un jugement sur une solution donnée<br>*Dégager :* extraire une propriété, une régularité, une généralité par déduction ou par induction<br>*Formuler :* pouvoir mettre en mots/symboles la propriété, régularité, généralité dégagée<br>*Expliquer :* description, explication, justification ou validation d'une solution donnée ou d'une généralité dégagée |
| **Position attribuée à l'élève**<br>Position dans laquelle est placé l'élève pour effectuer la tâche en situation (liée au contrat didactique) | *Élève* : position « habituelle »<br>*Co-équipier* : Après avoir réalisé individuellement le problème, l'élève interagit avec un autre élève pour réaliser une production écrite commune.<br>*Enseignant implicite* : Sans être explicitement placé en position d'enseignant, l'élève est appelé à se prononcer sur la production d'un élève. Il est détourné de son rôle habituel afin de décoder et commenter des stratégies d'élèves-fictifs.<br>*Enseignant explicite* : en adoptant une posture d'enseignant, l'élève est invité en quelque sorte à assumer la responsabilité du savoir en jeu et donc de sa validité. S'il accepte cette invitation, la position depuis laquelle il aborde le problème risque de faire appel à un autre milieu, c'est-à-dire que d'autres connaissances risquent d'être mobilisées (Fiola, 2005; René de Cotret, 2014). Il s'agit d'une forme de stratagème pour aider l'élève à puiser dans l'ensemble de ses connaissances et pour l'amener à justifier davantage les résultats obtenus. |
| **Interlocuteur de l'élève**<br>À qui l'élève s'adresse, avec qui il interagit | *Enseignante* : contrat didactique « normal », l'élève voit une hiérarchie/autorité probable attribuée à l'enseignante. Des codes mathématiques sont communs, des savoirs institués sont aussi partagés.<br>*Co-équipier :* égalité des protagonistes, pas de hiérarchie, arguments d'autorité peu probables.<br>*Élèves fictifs* : en position d'enseignant, l'élève s'adresse aux élèves-fictifs qui ont produit des solutions.<br>*Classe fictive* : en position d'enseignant, une question dans la situation invite l'élève à expliquer à la classe l'équivalence de deux stratégies.<br>*« Quidam »* : référence au « langage » mathématique moins probable ou moins pertinent ou efficace, codes mathématiques non nécessairement communs |
| **Registres du problème**<br>Les registres de représentation utilisés dans l'énoncé du problème écrit | *Mots*<br>*Données numériques*<br>*Dessins*<br>*Solution d'élèves-fictifs (celle-ci pouvant s'exprimer en mots, en données numériques, en dessins, en tables de valeurs, etc.)* |
| **Modalité de travail**<br>Travail seul ou en équipe | *Seul*<br>*Équipe/dyade* |

La prochaine section présente chacune des six situations de la séquence développée de même que leur analyse a priori. Les situations ont été sélectionnées et adaptées à partir de matériaux didactiques déjà existants et reconnus pour solliciter une activité mathématique chez l'élève. Nous expliquerons comment le jeu sur les valeurs des variables retenues devrait permettre de modifier les exigences de communication d'une situation à l'autre et, aussi, parfois, de contrer une conduite de communication probable et qui apparaît peu riche. De plus, en fonction des valeurs des variables, les situations sollicitent soit une phase d'action, de formulation ou de validation.

Des situations sont adaptées de manière à placer les élèves dans une position d'enseignant. Ce choix vise à les amener, entre autres, à expliciter ce qu'ils considèrent important dans une production mathématique ainsi que ce qui, selon eux, relève du travail de l'enseignant, notamment la responsabilité de la validité du savoir en jeu. L'adoption de ce rôle veut ainsi solliciter de la part des élèves-enseignants des éléments de justification et de validation qui témoignent d'une communication riche. Bien que ces éléments puissent aussi être caractéristiques d'une posture journalistique, nous pensons que cette dernière est moins connue des élèves et qu'alors l'appel à la justification et à la validation serait moins spontanément perçu par les élèves et leurs écrits pourraient se rapprocher d'une explication qui fait appel à des arguments moins riches qu'en position d'enseignant.

### 3.4 Conception et analyse a priori des six situations de communication

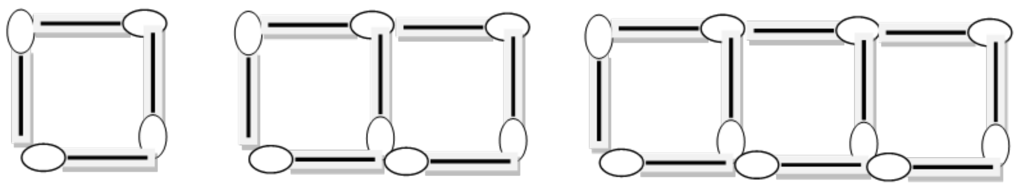
Les six situations[48] visent à solliciter une communication mathématique chez les élèves. Ainsi, l'analyse a priori se concentre à montrer comment les valeurs attribuées aux variables offrent un levier pour influer la communication des élèves de même que les stratégies qu'ils pourraient déployer en conséquence. En effet, c'est ici le potentiel de développement de la compétence à communiquer qui est en jeu et c'est donc sur ce volet que porte principalement l'analyse a priori. Cela dit, cette compétence n'a de sens que si elle s'inscrit dans une véritable activité mathématique. L'analyse a priori cherche donc aussi à montrer le potentiel d'activité mathématique porté par chacune des situations, sans nécessairement analyser l'ensemble des variables didactiques de nature mathématique en jeu.

[48] Dans la prochaine section, les six situations conçues et expérimentées sont introduites par ordre chronologique de réalisation. À l'**annexe 17**, l'ensemble des situations remises aux élèves sont insérées et elles peuvent être retirées pour faciliter la lecture de la présente analyse a priori.

### 3.4.1 La situation des Allumettes[49]

*Figure 2 - Énoncé de la situation des Allumettes*

*On a formé les dessins suivants à partir d'allumettes. Par exemple, le premier dessin est formé à l'aide de 4 allumettes.*



*a) En expliquant bien ta réponse, combien d'allumettes contiendrait le 97e dessin ?*

*b) Quel rang occupe le dessin qui contient 46 allumettes ? Explique.*

*c) Comment fait-on pour connaître le nombre d'allumettes que contient un dessin quand on connait son rang ?*

#### 3.4.1.1 Valeurs des variables relatives à l'ensemble de la situation

Il s'agit ici d'un problème classique, où l'on fait appel au dénombrement pour introduire les suites, et qui demande à l'élève de dégager une régularité pour arriver à généraliser la relation allumettes/rang. L'élève doit développer une stratégie pour trouver rapidement le nombre d'allumettes en fonction du rang du dessin. Ce problème de suite constitue un tremplin pour éventuellement introduire ou mobiliser l'algèbre.

##### 3.4.1.1.1 Stratégies mathématiques de résolution pour l'ensemble de la situation

Pour la sous-question a), le choix de demander d'abord le nombre d'allumettes pour le 97e dessin vise à contrer une stratégie de simple comptage. En effet, même si celle-ci demeure possible, elle devient très couteuse avec un aussi grand nombre de dessins. Ainsi, bien qu'il s'agisse d'un cas particulier (97e dessin), on vise une forme de généralisation du calcul du nombre d'allumettes selon le rang du dessin. Ce type de problème est, en principe, familier pour les élèves qui ont déjà vu les suites[50] et la façon de trouver le lien entre le terme et le rang, de même que la valeur initiale dans une suite arithmétique, et ce, habituellement une fois les données extraites du problème inscrites dans une table de valeurs.

[49] Stegen, P., 2004. Un triangle qui grandit…un outil pour aborder les suites numériques à l'école primaire. RMT. Tome 2. pp. 21-34.

[50] En première secondaire, les suites arithmétiques sont habituellement introduites pour amorcer une forme de discours algébrique moins formel avec les élèves et pour dégager des régularités. Nous verrons également, un peu plus loin dans le chapitre, que ce type de problèmes était aussi familier aux élèves qui ont participé à l'expérimentation puisque l'enseignante en avait exploités avec eux.

Par ailleurs, il est possible que les élèves utilisent des stratégies plus liées à la « construction » des dessins successifs pour produire leur résultat (4 allumettes par carré, moins une allumette par carré ajouté au premier; 3 allumettes par carré, plus une allumette pour le 1er carré, etc.).

Pour la sous-question b), l'élève peut utiliser une stratégie de dénombrement. À partir d'une table de valeurs ou d'un dessin, il ajoute trois allumettes jusqu'au rang qui lui donne 46 allumettes. Il n'a alors que 15 cases à compléter dans une table ou à présenter sous une autre forme.

Il peut aussi résoudre une équation à partir des opérations inverses. Selon la règle[51] qu'il détermine, il peut par exemple utiliser la règle de la forme canonique (3n+1) à rebours en formant l'équation 3n+1 = 46 et en isolant par des opérations inverses la variable « n ». Si l'élève travaille avec une autre règle, par exemple 4n – (n - 1), il peut aussi exécuter à rebours les opérations en posant une équation, mais les opérations inverses seront un peu plus complexes, notamment ici, il doit penser à la distributivité du «-1» devant la parenthèse.

Pour la sous-question c), l'élève peut utiliser plusieurs règles, notamment celle trouvée par la stratégie canonique (3n+1), ou 4n – (n - 1). Il peut aussi utiliser une stratégie liée à un processus général de construction en mots. L'élève prend une distance par rapport aux règles plus formelles pour décrire dans ses mots une méthode de construction générale des motifs.

Nous exemplifions quelques stratégies anticipées à l'**<u>annexe 3</u>**.

*3.4.1.2 Conduites de communication anticipées pour l'ensemble de la situation*

**Pour la sous-question a)**

Cette première sous-question demande à l'élève de résoudre la question et d'expliquer sa réponse. Différentes conduites de communication peuvent être utilisées pour répondre à cette demande d'explication.

- **<u>Description des actions|calculs</u>** : l'élève narre son action sans apporter de justification.
  - **<u>Solution canonique</u>** : description (juste ou fausse) du processus appris : Par exemple : « *J'ai fait la table de valeurs. J'ai calculé les écarts en haut et en bas. J'ai calculé le terme au rang 0 (4 = 3 × 1 +1). Ensuite j'ai trouvé le nombre d'allumettes pour le 97e dessin (3 × 97 +1 = 292)* ».
  - **<u>Solution liée à la construction</u>** : description des actions/calculs successifs conduisant (justement ou pas) à la « construction » du 97e dessin. Par exemple : « *J'ai fait 4 fois 97 et j'ai soustrait 96* ».

---

[51] Pour la suite de nos propos, nous emploierons le terme « règle » pour décrire l'expression produite par les élèves puisque la plupart d'entre eux l'ont inscrite dans une relation d'égalité afin de trouver le nombre d'allumettes d'un rang donné. Toutefois, nous sommes conscient qu'il aurait été préférable d'employer le terme « expression » mathématique puisque nous ne référons pas à strictement parler à une relation d'égalité entre deux termes.

- **Justification des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles ces actions sont posées, ce qu'elles visent (trouver ceci ou cela). Il peut aussi utiliser d'autres formes de représentation pour justifier ce qu'il avance : faire des flèches, des schémas, etc).
    - **Solution canonique :** Par exemple : « *J'ai fait la table de valeurs pour voir combien d'allumettes il y a à chaque rang. J'ai calculé les écarts entre les rangs (+1) et entre les allumettes (+3 qui donne le taux de variation). J'ai calculé le terme au rang 0 (4 = 3 × 1 +1) en utilisant le rang 1 et son nombre d'allumettes (4) dans la règle : nombre d'allumettes = (taux de variation) • n + (terme au rang 0). Cela m'a donné le terme au rang 0 (1). J'ai utilisé la règle 3n+1 pour trouver le nombre d'allumettes du 97e dessin (3 × 97 +1 = 292 »).*
    - **Construction personnelle:** Par exemple : «*j'ai pris 4 allumettes par carré (4 × 97) et j'ai soustrait 96 allumettes qui se superposaient dans la création des motifs ».*
- **Validation des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles les actions sont valides et qu'elles conduisent bien au résultat cherché
    - **Solution canonique :** La stratégie canonique ayant été institutionnalisée par l'enseignante, elle devient alors un outil de résolution pour l'élève pour ce type de problème. Au sens de Chevallard, elle devient une technique qui est réutilisée par l'élève dans des contextes similaires. Or, pour valider la stratégie canonique qu'il a apprise, l'élève doit être en mesure de justifier sa provenance, de tenir un discours technologique sur cette technique. Toutefois, comme cette technique est validée par l'enseignante, il n'est peut-être pas nécessaire pour l'élève de la valider de nouveau. Dans ce cas précis, l'élève, s'il souhaite à nouveau expliquer sa stratégie, pourrait revenir à la construction du dessin des motifs des allumettes pour expliquer la signification, par exemple, du terme au rang 0. « *À chaque motif, j'ajoute trois allumettes. À partir du premier terme de la suite, si je reviens en arrière et que je retire trois allumettes, je retrouve le terme au rang 0 qui est représenté par une allumette. Ce rang n'est pas représenté dans ce problème. C'est un rang abstrait.* ». Une telle justification amènerait à constater que l'élève, non seulement peut utiliser la technique, mais comprend aussi sa provenance et assure une certaine validité de la technique.
    - **Construction personnelle :** Par exemple : « *J'ai pris 4 allumettes par carré (4 × 97), car chaque carré étant formé de 4 allumettes, j'ai calculé le total d'allumettes pour 97 carrés. Ensuite, j'ai soustrait 96 allumettes qui se superposaient dans la création des motifs, car lorsque l'on colle ensemble deux carrés, on voit que deux allumettes se superposent. Il faut donc en retirer une. Si l'on a 97 carrés, il faut au total retirer une allumette pour chacun des carrés ajoutés, donc 96 allumettes ».*

- Conduite de communication qui consiste à laisser simplement les traces de sa résolution, **rien ne venant toutefois appuyer les étapes**. Il revient alors à l'interlocuteur de décoder la solution.
- Seule la réponse est présente[52].

**Pour la sous-question b)**

- **Description des calculs** : l'élève décrit ses calculs sans apporter de justification.
    - **Résolution d'une équation à partir des opérations inverses:** résolution à l'aide des opérations inverses de l'équation posée en montrant toutefois les étapes de sa résolution (par exemple, à partir de l'équation 3n+1, « - 1 de chaque côté », « diviser par 3 ensuite », etc.)
    - **Solution par dénombrement :** l'élève construit sa table de valeurs et arrête lorsqu'il a 46 allumettes en nommant le rang 15.
- **Justification des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles ces actions sont posées, ce qu'elles visent (trouver ceci ou cela). Il peut aussi utiliser d'autres formes de représentation pour justifier ce qu'il avance : faire des flèches, des schémas, etc.)
    - **Résolution d'une équation à partir des opérations inverses:** résolution à l'aide des étapes inverses de l'équation posée en montrant toutefois les étapes de sa résolution (par exemple, à partir de l'équation 3n+1, « - 1 » de chaque côté, diviser par 3 ensuite, etc., mais aussi en expliquant que les étapes servent à maintenir l'égalité dans l'équation : « *je retire « 1 » de chaque côté parce que c'est la même quantité de chaque côté de l'équation et que je maintiens donc l'équilibre, etc.* ».
    - **Solution par dénombrement :** l'élève construit sa table de valeurs et arrête lorsqu'il a 46 allumettes en nommant le rang 15. Pour atteindre le niveau de justification, l'élève pourrait expliquer ce qu'il observe dans la construction des motifs (le taux de variation). Par exemple, « à chaque dessin, j'ajoute trois allumettes ».
- **Validation des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles les actions sont valides et qu'elles conduisent bien au résultat cherché.
    - **Résolution d'une équation à partir des opérations inverses:** en ayant fait toutes les étapes précédentes, l'élève pourrait, d'une part, remplacer la valeur trouvée dans son équation de départ pour s'assurer de vérifier celle-ci. Il pourrait aussi inscrire ou référer aux propriétés des opérations qui lui permettent de réduire ses équations : propriété additive et multiplicative, associativité, commutativité, etc.

[52] Ces deux dernières conduites de communication sont présentes dans les six situations. Pour éviter d'alourdir le texte, nous ne les répéterons pas pour les prochaines situations.

- **Solution par dénombrement :** pour valider que la valeur trouvée est la bonne, l'élève pourrait remplacer la valeur trouvée dans une règle algébrique (3n + 1, par exemple) qu'il explique pour valider que le rang trouvé est le bon (46 = 3n + 1). Il peut également référer aux propriétés des opérations.

**Pour la sous-question c)**

Pour cette sous-question, l'élève n'a pas le choix de généraliser une façon qui lui permet de trouver le nombre d'allumettes connaissant un rang donné. Il doit regarder la structure des relations entre le rang et le nombre d'allumettes. Il doit donc nommer les objets en jeu d'une manière générale et ne peut pas référer aux nombres en jeu. Il doit donc entrer dans des conduites de justification et de validation en s'éloignant d'un discours arithmétique pour entrer dans un discours algébrique.

Les mêmes conduites (canonique et construction personnelle) décrites précédemment peuvent permettre à l'élève de valider une méthode générale algébriquement. Il peut aussi utiliser le registre des mots pour justifier sa généralisation. Par exemple : « *Dans le premier dessin, je vois 4 allumettes. A chaque nouveau motif, j'ajoute trois allumettes (qui forment un « C » à l'envers). Pour savoir combien d'allumettes contient un rang donné, je remarque que je dois ajouter un nombre de « C » inférieur de un au rang cherché. Donc, si on me demande le nombre d'allumettes pour le 34$^{e}$ rang, j'ai ajouté, au premier motif de 4 allumettes, 33 « C » (donc 99 allumettes). Le nombre total d'allumettes est donc de 99 + 4, donc 103.* »

Dans ce dernier exemple, l'élève généralise en mots une règle (non formelle) et il maîtrise les relations entre le rang et le nombre d'allumettes, mais en utilisant ses propres référents, notamment ici un trio d'allumettes qui a la forme d'un « C ». Surtout, il se donne un exemple précis, évitant ainsi la formulation générale des objets en jeu.

### *3.4.2 La situation du Magicien*[53]

*Figure 3 - Énoncé de la situation du Magicien*

Un magicien invite une personne à choisir un nombre quelconque sans le révéler. Il lui demande ensuite d'effectuer les opérations suivantes :

- *Multiplier ce nombre par 4 ;*
- *Additionner 12 ;*
- *Diviser le dernier résultat par 2 ;*
- *Additionner 10 ;*
- *Diviser le dernier résultat par 2 ;*
- *Soustraire le nombre choisi au départ.*

Le magicien révèle ensuite que le résultat obtenu à la suite de ces opérations est 8.

a) Explique mathématiquement pourquoi il ne s'agit pas de magie.
b) Invente un « truc de magie » en cinq étapes qui amènerait toutes tes « victimes » avec un résultat final de 20. Explique ensuite par écrit pourquoi ton truc fonctionne.

#### *3.4.2.1 Stratégies mathématiques de résolution pour l'ensemble de la situation*

Le problème du *Magicien* repose sur une identité algébrique et il propose aux élèves de découvrir, non formellement, cette identité algébrique. En effet, on présente à l'élève une série d'opérations algébriques sur un nombre choisi. Les opérations demandées font en sorte d'arriver à la dernière étape à l'équation « 8 + nombre quelconque choisi au départ » et on demande ensuite à l'élève de retirer son nombre choisi. Ainsi, peu importe le nombre « x » choisi au départ, les opérations du magicien ramèneront ce même nombre « x » à s'éliminer à la fin de la séquence pour laisser le résultat de 8.

**Pour la sous-question a)**

- **Usage du discours écrit pour expliquer l'identité algébrique** : expressions algébriques écrites en mots puisque la mise en équations algébriques à partir d'un énoncé en mots n'a pas été abordée en classe au moment de l'exploitation du problème.

- **Algébrisation complète de l'explication de l'identité** : on pose une variable « x » comme étant le nombre de départ, on forme des expressions algébriques que l'on simplifie (**annexe 3**).

- **Amorce algébrique de l'explication de l'identité**: on pose une variable comme étant le nombre de départ, mais le contrôle sur la réduction des expressions algébriques n'est pas tout-à-fait maîtrisé.

[53] Boivin et al., 2006. Panoramath, 1er cycle du secondaire. Manuel B. Volume 2. Les Éditions CEC. 222p. Problème tiré de la page 14.

- **<u>Faire une série d'essais et conclure que le truc fonctionnera tout le temps</u> :** l'élève fait plusieurs essais numériques avec différents nombres sans amorce de généralisation. Il pourrait aussi essayer avec des nombres décimaux ou fractionnaires se rapprochant ainsi de l'expérience cruciale.

**Pour la sous-question b)**

- **<u>Cinq étapes complexes qui répondent à une identité et qui mobilisent les quatre opérations de base</u>:** *Prends un nombre, double-le, ajoute-lui 10, divise ton résultat par 2, retire ton nombre de départ, retire 3, ajoute 18.*
- **<u>Cinq étapes qui répondent à une identité en faisant des additions et soustractions</u> :** *Prends un nombre, ajoute 5, retire 3, ajoute 7, retire 1, retire 8.*
- Dans l'un ou l'autre des deux scénarios précédents : **<u>l'élève ne fait pas 5 étapes, il se limite à un nombre moindre d'étapes, mais réussit le jeu d'élimination du nombre choisi pour arriver à 20.</u>**
- **<u>Cinq étapes qui ne répondent pas à une identité</u>** : l'élève fait une série de « 5 calculs » en nous montrant les opérations qui arrivent à 20 sans généralisation sur le truc (pourquoi il fonctionne, ce n'est pas une identité). Il part d'un nombre connu. *Avec le chiffre 5, multiplie par 2, ajoute 1, retire 1, divise par 2, multiplie par 4.*

*3.4.2.2 Conduites de communication individuelle anticipées pour l'ensemble de la situation*

**Pour la sous-question a)**

La présente situation est plus exigeante en termes de communication que les *Allumettes*. La première partie de la question s'avère particulièrement complexe sans recourir à des expressions algébriques. Le recours à des expressions algébriques pour représenter le problème serait plutôt étonnant, mais il est envisagé plutôt des relations et équations écrites en mots venant appuyer la résolution. A cet égard, la situation peut solliciter plus de discours écrit de la part des élèves et c'est principalement là qu'il faut y voir exigence supplémentaire de communication comparativement aux *Allumettes* qui repose davantage sur une forme de discours convenue (la stratégie canonique). Par conséquent, les élèves seront davantage appelés à discourir par écrit pour s'expliquer. Ils resteront probablement dans un discours en mots ou en symbolique opératoire (x4 ; +12, etc.) pour expliquer ce qu'ils observent.

- **<u>Amorce d'une justification:</u>** l'élève tire quelques constats de ses actions (par exemple, *« si on me demande, après avoir multiplié mon nombre par 4, de lui additionner 12, pour ensuite diviser le tout par 2, c'est comme si on m'avait demandé de le doubler et de lui additionner 6 »)* et amorce des premières étapes de généralisation quant au « jeu d'élimination», à l'identité algébrique, qui est fait avec le nombre du départ, soit par le registre des mots, soit par des symboles (flèches ; ×4 ; +12, etc.). Par exemple : « *le magicien me fait faire des opérations inverses qui s'annulent* » ou bien « *peu importe* *mon nombre de départ, le magicien me le fait retirer à la fin après une série d'opérations qui s'annulent* ».

- **Amorce d'une validation :** l'élève généralise, en mots ou en algèbre, que le nombre de départ est éliminé par les étapes. Il peut expliquer en mots son travail ou à l'aide du discours algébrique. Par exemple, on peut s'attendre au raisonnement suivant : « *en prenant mon nombre et en le multipliant tout d'abord par 4, celui-ci est 4 fois plus gros. Ensuite, on me demande de lui additionner 12. Par la suite, je dois diviser le tout par 2. Cela revient à n'avoir pris que le double de mon nombre pour ensuite lui additionner 6 (la moitié de 12). À cette étape, c'est comme si j'avais seulement ajouté 6 au double de mon nombre de départ. On me demande alors d'ajouter 10. Je suis donc rendu au double de mon nombre de départ + 16. Enfin, je dois diviser le tout par 2. Je reviens donc à mon « nombre de départ + 8 ». Si on me demande de retirer mon nombre de départ, il est alors certain que je vais obtenir 8.* »

  Que ce soit par l'algèbre ou en mots, le problème du *Magicien* invite l'élève à une forme de généralisation. Or, les stratégies suivantes risquent aussi d'apparaître sans aucune forme de généralisation :

- **Seuls des essais|calculs sont présentés** : le discours ne repose que sur des calculs.
- **Seule une affirmation est présente :** « *ce n'est pas de la magie parce que…* » ou référence au fait que la magie n'existe pas.

**Pour la sous-question b)**

L'élève est placé en position « d'élève-magicien » pour produire un truc de magie pour un quidam et ensuite expliquer le fonctionnement du truc (à l'enseignante). La position d'élève-magicien peut mener les élèves à des trucs de magie de plus haut niveau sur le plan de la communication puisqu'ils cherchent à camoufler leur truc pour piéger. La position de magicien peut aussi influencer le niveau d'engagement de l'élève dans la tâche et lui proposer un enjeu plus stimulant.

- **Description des actions|calculs** : l'élève narre ses actions|calculs sans tirer une conclusion, une généralisation. On laisse la responsabilité à l'interlocuteur de décoder la conclusion. On voit « 5 étapes d'opérations » (sous forme d'identité ou non) avec des courtes phrases venant appuyer les actions, mais aucun mot ne laisse entrevoir explicitement l'identité ou les explications qui supportent les étapes qui ne conduisent pas à une identité.
- **Amorce d'une justification:** l'élève tire quelques constats de ses actions et amorce des premières étapes de généralisation quant au « jeu d'élimination » qui est fait avec le nombre du départ dans son truc par des mots (Par exemple, « *il faut que je trouve des opérations qui s'annulent* ». On voit « 5

étapes d'opérations » (sous forme d'identité ou non) avec des courtes phrases et d'autres registres (flèches, variables, dessins, schémas, etc.) venant appuyer les explications.

- **Justification de cinq étapes:** On voit « 5 étapes d'opérations » (sous forme d'identité ou non) avec des courtes phrases et d'autres registres (flèches, variables, dessins, schémas, etc.) venant appuyer les explications. Par exemple :

| | |
|---|---|
| *Choisis un nombre* | |
| *Multiplie ce nombre par 3* | (j'ai alors un nombre trois fois plus grand) |
| *Retire le double de ton nombre du résultat obtenu* | (ainsi, on ramène le nombre de départ) |
| *Multiplie ton résultat par 2* | (mon nombre de départ est deux fois plus grand) |
| *Ajoute-lui 4* | (j'ai le double du nombre de départ plus 4) |
| *Divise le résultat par 2* | (je me ramène au double du nombre de départ ajouté de 2) |
| *Retire le double de ton nombre de départ et ajoute 18* | (j'ajoute alors 18 à la constante 2 pour arriver à 20) |

- **Amorce d'une validation :** l'élève généralise, en mots ou en algèbre, que le nombre de départ est éliminé par les étapes qu'il invente. Il peut expliquer en mots son travail ou à l'aide du discours algébrique. L'élève pourrait présenter, par exemple les étapes précédentes, et montrer algébriquement l'identité à l'aide d'une variable qui s'élimine au fur et à mesure des manipulations algébriques qu'on lui fait faire.

*3.4.2.3 Conduites d'interaction des dyades anticipées pour l'ensemble de la situation*

Après que les élèves tentent de résoudre la situation individuellement, ils sont placés en dyades. Le choix de solliciter les interactions entre élèves est fait de manière à rehausser l'exigence de communication demandée dans cette situation, comparativement à la situation des *Allumettes*.

D'une part, les élèves doivent décoder la stratégie d'un autre élève et l'explication qui l'accompagne. Ensuite, ils doivent ensemble déterminer si leurs stratégies et explications se rejoignent ou s'opposent. A cet égard, les élèves interagissent prioritairement à l'oral et, aussi, peut-être, par écrit ou le geste (en pointant des éléments sur les deux productions; en les complétant ; en y indiquant des liens entre les étapes ; etc.). Au cours du processus d'échange, les élèves doivent se convaincre, et convaincre le coéquipier. Les élèves doivent par la suite déterminer comment enrichir mutuellement leurs stratégies et conséquemment leur discours pour produire une seule explication, laquelle est remise à l'enseignante.

Les interactions devraient mener aux mêmes conduites de communication que celles présentées précédemment. Toutefois, il est souhaité que les interactions entre les deux élèves les mènent vers des conduites de communication de niveau plus élevé allant jusqu'à la justification et la validation. Dans cette situation précise, on peut s'attendre à des justifications plus explicites du fonctionnement du truc. De même, pour la partie b), les trucs proposés seront sans doute mieux explicités, avec des opérations plus complexes, visant à piéger davantage une victime.

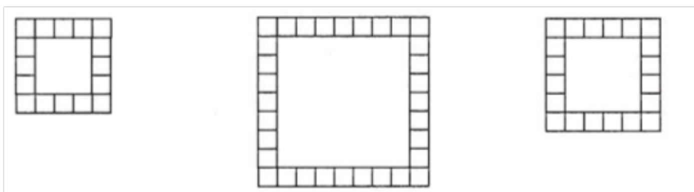
### *3.4.3 La situation de l'Enseignant*[54]

*Figure 4 - Énoncé de la situation de l'Enseignant*

**Amélie et Maxime, deux de tes élèves, viennent de te remettre leur solution au problème suivant.**

*Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (<u>la surface blanche sur les dessins</u>) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.*

*Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux autour du miroir de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.*



*a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?*

b) *Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?*

**Comme enseignant, tu dois :**

*1- Répondre toi-même à la question, puis faire ton corrigé.*

*2- Ensuite, ton enseignante te remettra les copies de Maxime et Amélie. Corrige les productions d'Amélie et de Maxime en inscrivant des commentaires directement sur leurs copies.*

*3- Comment pourrais-tu expliquer à la classe le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé la même règle ?*

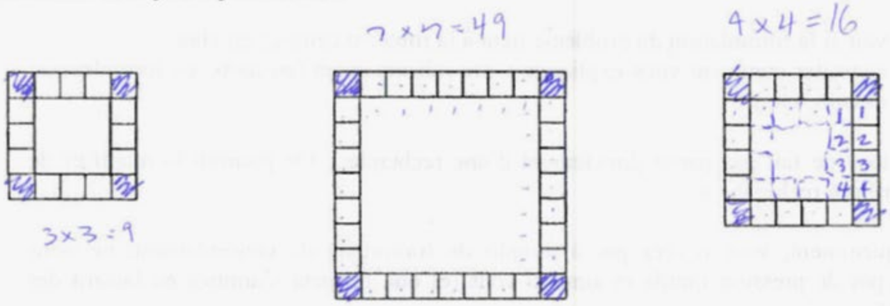
*4- Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.*

[54] Problème fait à partir d'une activité réalisée au Groupe Didactique de la CI-IREM, Marseille, 2006.

*Figure 5 - Solution présentée par Maxime à la situation de l'Enseignant*

***Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (<u>la surface blanche sur les dessins</u>) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.***

***Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux <u>autour du miroir</u> de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.***




***a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?***

***b) Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?***

- le nombre de carreaux sur un côté est pareil à la mesure
- le nombre de coins est toujours la même = 4

$3 \times 3 = 9 \qquad (4 \overset{12}{\times} 3) + 4 \text{ coins} = 16$

$4 \times 4 = 16 \qquad (4 \overset{16}{\times} 4) + 4 \text{ coins} = 20$

$7 \times 7 = 49 \qquad (4 \overset{28}{\times} 7) + 4 \text{ coins} = 32$

côté

a) $(4 \times \text{côté}) + 4 = \text{nombre de carreaux}$

b) $(4 \times \_\_) + 4 = 88$

$+4-4 \qquad 88-4$

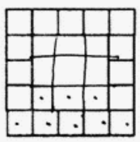
$4 \times \_ = 84$

$= 84 \div 4 = 21$

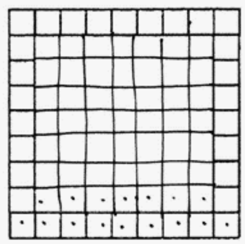
*Figure 6 - Solution présentée par Amélie à la situation de l'Enseignant*

*Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (la surface blanche sur les dessins) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.*

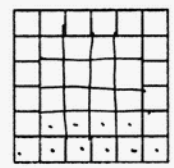
*Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux autour du miroir de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.*



5 x 5 = 25
3 x 3 = 9
25 - 9 = 16



9 x 9 = 81
7 x 7 = 49
81 - 49 = 32



6 x 6 = 36
4 x 4 = 16
36 - 16 = 20

*a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?*

b) *Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?*

a) Pour trouver le nombre de carreaux pour l'encadrement, il faut trouver le nombre de carreaux total et enlever le nombre de carreaux sur le miroir.

Formule = (coté + 2 x côté + 2) - côté x côté

b) ~~17~~ + 2 = 19 x 19 = 361
361 - 289 = 72

~~18~~ + 2 = 20 x 20 = 400
400 - 324 = 76

| | | |
|---|---|---|
| 17 | = 72 | ) +4 |
| 18 | = 76 | ) +4 |
| 19 | 80 | ) |
| 20 | 84 | ) |
| 21 | 88 | |

Rép : 21 carrés sur un côté

La situation comprend quatre parties qui sont analysées plus spécifiquement par la suite.

- *Partie 1 (a et b)* : Étant placé dans une position d'enseignant, l'élève doit faire son corrigé (résoudre la situation pour lui-même).
- *Partie 2 :* Il doit ensuite corriger les productions d'Amélie et de Maxime en inscrivant des commentaires directement sur leurs copies.
- *Partie 3 :* Par la suite, il doit expliquer à la classe le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé le même terme général.
- *Partie 4* : Enfin, il doit décider entre les deux solutions proposées celle qui semble meilleure que l'autre en expliquant son choix.

Tous les types de situations de la TSD sont présents dans cette situation. Tout d'abord, une phase d'action : une série d'essais des élèves-enseignants pour faire leur propre solution considérée comme leur corrigé. Ensuite, on demande d'expliquer à l'encadreur comment trouver rapidement le nombre de carreaux s'il connaît un côté, ce qui ramène à la phase de formulation puisqu'on demande à l'élève d'expliquer la généralisation d'une relation mathématique. Enfin, une phase de validation : les élèves doivent prendre position sur la meilleure solution (en corrigeant et en se prononçant sur la meilleure). Ils doivent aussi faire des liens entre des éléments théoriques appris et leurs articulations par des élèves-fictifs puisqu'ils sont dans la peau d'un enseignant. Ils ne peuvent se contenter d'être dans la narration. Ils doivent aller plus loin dans leurs explications. Les élèves-enseignants doivent sentir que dans cette partie de la situation, la stratégie ostensive (« voilà ce qu'il faut faire ») est vaine. Les élèves-enseignants doivent aussi expliquer à des élèves fictifs (la classe) l'équivalence des deux stratégies, ce qui ramène à la validation, mais aussi à un aspect de formulation. Finalement, ils doivent décider quelle est la meilleure stratégie. Les élèves reviennent alors en position « d'élèves » et expliquent leur choix à leur enseignante ce qui ramène aussi à des phases de validation et de formulation.

#### *3.4.3.1 Partie 1 : Faire son corrigé d'enseignant*

##### *3.4.3.1.1 Stratégies mathématiques de résolution pour la partie 1*

Dans cette situation, on demande aux élèves de résoudre un problème du même type que celui des *Allumettes* quant aux savoirs mathématiques en jeu (dégager le terme général d'une suite). Toutefois, le problème est spécifiquement choisi de manière à éloigner les élèves d'une stratégie canonique puisque la présentation des dessins, de manière désordonnée croissante, rend moins visible la suite et invite à d'autres stratégies. Les stratégies mathématiques suivantes ont été colligées par des participants d'un groupe de didactique de la CI-IREM (2006).

**Pour la sous-question a)**

- **Stratégies de résolution <u>par l'intérieur</u>** (« *n* » longueur du côté du carré intérieur) :

- **par périmètres :** $4n + 4$, ou $4(n + 1)$, ou $2n + 2(n + 2)$, $4(n + 2) - 4$, $[n + (n + 2)] \times 2$,

- **par aires :** $(n + 2)^2 - n^2$

- **par suites (solution canonique semblable à la situation des *Allumettes*)**

- **Stratégies de résolution <u>par l'extérieur</u>** (« m » longueur du côté du carré extérieur « m = n + 2 ») :

- **par périmètres :** $4m - 4$, $4(m - 1)$, ou $4(m - 2) + 4$, ou $2m + 2(m - 2)$, $[m + (m - 2)] \times 2$,

- **par aires :** $m^2 - (m - 2)^2$

**Pour la sous-question b)**

- **Stratégie qui consiste à faire des <u>essais contrôlés</u>** : l'élève se donne une première valeur pour le côté du miroir et vérifie si la valeur arrive à un encadrement de 88 carreaux. Il ajuste ensuite la valeur de mesure du côté du miroir en fonction du nombre total de carreaux calculés (si la valeur totale de carreaux obtenue est trop élevée, il diminue le nombre total de carreaux pour le côté; à l'inverse si la valeur totale de carreaux pour le pourtour est trop basse, il augmente sa valeur de côté).

- **Stratégie algébrique de résolution d'une équation <u>par les opérations inverses</u>** : selon la règle qu'il détermine, il peut à rebours, en formant l'équation règle = 88, isoler le « n » par des opérations inverses**.**

*3.4.3.1.2 Conduites de communication anticipées pour la partie 1*

Afin d'amener les élèves à communiquer encore davantage, la situation de l'*Enseignant* place l'élève dans la peau d'un enseignant qui doit juger de productions d'élèves (la production de Maxime et d'Amélie). Par cette position, cette situation exige encore plus d'habiletés en communication que les deux premières situations. En effet, en plaçant l'élève dans la peau d'un enseignant, on propose d'une part un défi qui devrait susciter l'engagement de l'élève puisqu'il y percevra un enjeu différent. D'autre part, il pourra s'exprimer comme « enseignant » au regard des attentes qu'il a face à une communication adéquate de la part d'élèves de 2e secondaire.

Ensuite, on demande aux élèves de corriger, de valider et de prendre position sur les réalisations de deux élèves-fictifs. La prise de position intervient donc, tant dans la correction qui est faite des deux copies, que dans la question directe où l'on demande à l'élève-enseignant de choisir laquelle solution est la « meilleure ».

Les traces laissées par l'élève-enseignant peuvent être révélatrices des éléments qu'il juge important à considérer dans une communication écrite d'une stratégie. Les éléments qu'il pointera seront sans doute issus de son expérience du monde scolaire et des attentes manifestées à son endroit à l'égard de sa propre communication (des commentaires passés reçus ; des attentes qu'il a décodées quant à l'organisation d'une démarche de ses enseignants, etc.).

Sur le plan du décodage, l'élève doit comprendre les registres de communication d'Amélie et Maxime et analyser leur stratégie respective. En ce sens, la situation demande une exigence supplémentaire quant au décodage des registres et des raisonnements présents chez les deux élèves puisque ces derniers prennent des chemins différents : l'un travaillant avec le pourtour du miroir, l'autre avec une stratégie construite à partir de l'aire de sa surface.

Également, par les mécanismes de passation de la situation, on propose une relance pour les élèves qui seraient « bloqués » dans leur propre résolution. En effet, la présentation de deux solutions d'élèves-fictifs peut relancer les élèves-enseignants dans la recherche de leur propre solution. Ils peuvent analyser les copies de Maxime et Amélie pour mieux comprendre les stratégies qu'ils présentent et ainsi, peut-être, leur permettre de se réengager dans la recherche de leur propre stratégie.

Par conséquent, par l'analyse des productions d'élèves demandée, l'élève-enseignant peut être amené à poser un regard critique sur ses propres productions tout en commentant et améliorant les productions d'autres élèves. D'ailleurs, tout au long de cette situation, l'élève est appelé à laisser des traces écrites, d'abord à titre de résolveur du problème, ensuite, à titre d'élève-enseignant. En corrigeant des productions d'élèves, il entre dans un processus de validation et de prise de conscience face à sa propre solution. Il constate deux solutions qui arrivent à une même réponse, mais d'une manière possiblement différente de la sienne et cela force le regard sur sa propre production et suscite le questionnement sur les liens et relations mathématiques en jeu : « *pourquoi l'élève fait cela de cette manière* ? » ; « *pourquoi ça marche ?* » ; « *quelles propriétés ou relations entrent en jeu ici ?* » ; etc.).

L'élève doit finalement corriger et commenter des productions volontairement incomplètes ou imprécises forçant ainsi l'élève-enseignant à analyser le langage mathématique utilisé, la démarche proposée, les raisonnements sous-jacents, d'autres registres (les formules, les calculs et le texte de deux élèves) et à apporter des corrections. Dans cette partie de sa production, l'élève est davantage en situation de formulation où il doit écrire un message à ses interlocuteurs, Maxime et Amélie et l'enseignante (puisqu'il doit lui expliquer comment se fait-il que les deux élèves arrivent à la même réponse, mais avec des stratégies différentes).

La situation de l'*Enseignant* proposant un problème mathématique semblable à celui de la situation des *Allumettes*, les mêmes conduites de communication anticipées émergeront (voir à cet effet la **section 3.4.1.2**).

Par ailleurs, la position enseignante demandée viendra sans doute teinter la communication des élèves. Quelques précisions s'imposent, notamment :

- les élèves auront peut-être tendance à rester dans un discours pour eux-mêmes, notamment en se laissant quelques notes pour soi, en indiquant des mots-clés, des idées moins explicitement justifiées sur la feuille où leur production est attendue. Leur premier interlocuteur étant eux-mêmes, ils se comprennent et n'ont pas nécessairement besoin d'être si précis dans leur discours privé pour éventuellement continuer la tâche qui nécessite une prise de position.

- les élèves auront peut-être aussi le réflexe de rester en posture d'élève, car ils n'ont pas été habitués à adopter la posture d'un enseignant. Par conséquent, ils savent que la situation est réalisée dans un contexte de classe et que leur enseignante lira leur production (incluant leur corrigé). Ils pourraient donc s'appliquer davantage et laisser des traces pour l'interlocutrice qu'est leur enseignante (effet du contrat didactique), sans doute pour se conformer aux attentes habituelles.

- enfin, si les élèves jouent le jeu et adoptent leur posture d'enseignant, ils développeront peut-être un discours technologique, car ils se préparent à une analyse fine des copies d'Amélie et Maxime. À cet égard, certains élèves-enseignant voudront être précis, justes et rigoureux en référant à certaines techniques ou propriétés apprises.

*3.4.3.2 Partie 2 : Corriger et commenter les copies*

*3.4.3.2.1 Conduites de communication anticipées pour la partie 2*

Dans leur décodage des productions des deux élèves-fictifs, les élèves-enseignants pourraient :

- relever des connaissances erronées, des erreurs (par exemple, « *Amélie fait un mauvais usage du signe d'égalité*[55] *dans la sous-question b)* »)
- noter les limites des stratégies (Par exemple, la stratégie d'Amélie via les aires semble limitante pour elle en sous-question b) puisqu'elle n'arrive pas à résoudre son équation du 2<sup>e</sup> degré algébriquement)
- formuler des commentaires sur les pas de raisonnements des élèves, sur leur argumentaire (par exemple, dans la production d'Amélie, à la sous-question b), on peut se demander d'où provient la régularité « +4 » qu'elle indique) ;

[55] Le symbole d'égalité est souvent compris comme étant « *mon opération me donne…* ». Les élèves attribuent à ce symbole l'idée de conclusion d'un calcul plutôt que le sens « d'équivalence » entre deux quantités. Conséquemment, l'enseignant se retrouve souvent devant des opérations de la sorte (8 + 4 = 12 + 3 = 15). Caron (2004, p. 288) avait d'ailleurs noté cette difficulté (et Kieran, 1990), avant elle, dans ses travaux sur l'égalité.

- formuler des commentaires sur les registres en jeu et leur usage dans les résolutions (par exemple, Maxime semble faire un travail sur les dessins, mais les explications qui les accompagnent pourraient être plus élaborées. Aussi, il laisse des traces (3x3=9, 4x4=16, 7x7=49) laissant croire qu'il tente de trouver la réponse via la stratégie des aires);
- commenter la structure et la clarté des productions (par exemple, la copie de Maxime semble plus brouillonne que celle d'Amélie);
- commenter le niveau de formalisme en jeu dans chaque production (par exemple, Maxime n'utilise par le symbole « x » pour représenter sa variable);
- laisser des traces qui relèvent du contrat didactique et d'un aspect affectif : faire des « *B* » pour « *Bien* », faire des commentaires positifs ou négatifs ; attribuer un résultat à chaque production (par exemple, indiquer 8/10 dans la marge d'une copie);
- corriger lui-même les erreurs des élèves en montrant ou complétant les démarches qui auraient dû être faites (par exemple, sur la copie de Maxime, inscrire : « 4x+4=88 », pour formaliser l'équation ou inscrire les calculs d'Amélie un sous l'autre pour éviter le mauvais usage du symbole d'égalité);
- faire des commentaires écrits qui suscite le questionnement d'Amélie ou Maxime (par exemple, « *es-tu certain de ta réponse ?* »);
- utiliser des symboles. (par exemple « *?* », pour montrer son incompréhension);

#### *3.4.3.3 Partie 3 : Montrer l'équivalence des stratégies*

##### *3.4.3.3.1 Stratégies mathématiques et conduites de communication anticipées pour la partie 3 : montrer l'équivalence*

Les conduites anticipées de communication sont intimement liées aux stratégies mathématiques que l'élève pourrait utiliser pour tenter de montrer l'équivalence des stratégies. Force est de constater que l'exigence de communication est encore augmentée. Pour expliquer l'équivalence des stratégies, l'élève-enseignant doit, dans un premier temps, bien comprendre les registres de représentation qui sont utilisés par Maxime et Amélie et l'usage qu'ils en font. Non seulement doit-il les comprendre, mais il doit en plus lui-même les manipuler et les expliquer afin d'en montrer l'équivalence.

L'élève-enseignant est aussi placé devant deux stratégies bien distinctes : celle de Maxime, plus classique, et celle d'Amélie qui considère les surfaces des miroirs. Afin d'expliquer l'équivalence des stratégies, il ne peut rester dans un discours descriptif des stratégies. Il doit valider les stratégies et les mettre en correspondance. Il doit nommer les différents objets mathématiques en jeu de manière plus générale en se détachant de l'aspect opératoire sur les nombres. Par ce fait, les conduites de communication de premier niveau (description des actions) deviennent caduques et l'élève n'a d'autres choix que d'aller vers des stratégies de plus haut niveau telles que la justification et la validation.

Et à plus forte raison, il doit utiliser un discours écrit pour faire cela. Il n'a pas physiquement accès à une classe où il peut combiner un discours à l'oral et à l'écrit.

Par écrit, l'élève-enseignant pourrait aussi utiliser les registres algébriques pour montrer l'équivalence :

Règle de Maxime : $4n + 4$, où n représente le nombre de carreaux du côté de la figure

Règle d'Amélie : $(n + 2)^2 - n^2$
$= n^2 + 4n + 4 - n^2$
$= 4n + 4$

*3.4.3.4 Partie 4 : Faire le choix apparaissant comme le meilleur entre les solutions proposées*

*3.4.3.4.1 Conduites de communication anticipées pour la partie 4*

Les stratégies mathématiques et les conduites de communication anticipées sont fortement liées pour cette partie. L'élève doit à nouveau prendre position, mais sur la meilleure stratégie. En quelque sorte, il reprend ici sa posture d'élève pour communiquer avec son enseignante son argumentaire sur les deux stratégies. Sur un plan mathématique, il décodera les deux stratégies et prendra position en fonction de sa lecture des productions. À cet égard, les élèves se référeront aux mêmes arguments évoqués dans la deuxième partie de l'analyse de la présente situation. On peut anticiper deux tendances pour justifier la prise de position :

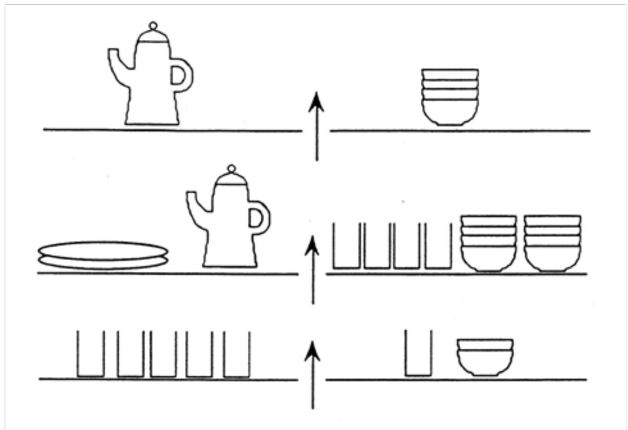
- La résolution de Maxime, plus traditionnelle, pourrait plaire à plus d'élèves qui délaisseront la stratégie mise de l'avant par Amélie qui sort de la voie classique.
- A contrario, ils pourraient trouver la stratégie d'Amélie plus complexe et donc lui accorder plus de crédibilité et décider qu'elle est la meilleure. Cela rappelle les travaux de Healy et Hoyles (2000) quant au fait que certains élèves voient dans une solution plus complexe, moins accessible, une meilleure solution simplement parce qu'ils sont de la difficulté à la suivre.

Toutefois, puisque chaque production fictive a ses forces et ses limites, la prise de position d'un élève pourrait, par exemple, être uniquement construite sur la netteté des productions ou sur d'autres éléments auxquels il accorde de l'importance.

### *3.4.4 La situation de la Balance*[56]

*Figure 7 - Énoncé de la situation de la Balance*

Sur une balance, je mets une cafetière, des assiettes, des bols et des verres. J'obtiens trois équilibres représentés par les trois dessins suivants.



a) Peux-tu comparer la masse d'un verre et d'un bol ? Explique clairement ta réponse.

b) Peux-tu comparer la masse d'une assiette et d'un bol ? Explique clairement ta réponse.

c) Je voudrais faire un équilibre avec des cafetières sur un plateau et des assiettes sur l'autre plateau. Fais le dessin qui représenterait cette situation d'équilibre. Explique clairement ta réponse.

#### *3.4.4.1 Stratégies mathématiques de résolution pour l'ensemble de la situation*

Pour la sous-question a), on demande d'établir la comparaison entre la masse d'un verre et d'un bol. Pour répondre à cette question, les élèves utiliseront probablement la troisième balance qui est présentée étant donné qu'elle établit déjà un équilibre entre des verres et des bols. Les stratégies suivantes peuvent émerger.

**<u>Stratégie par élimination</u> :** l'élève élimine ce qui est commun de chaque côté de la balance. Il raisonne sur l'équivalence de poids qui est conservée entre les deux plateaux pour déduire le résultat. « *Le poids d'un verre est égal à celui d'un autre verre, donc je peux en enlever un de chaque côté de la balance* ».

*Réflexion du type:*

$$5a = a + 2x$$
$$5a - a = (a + 2x) - a$$
$$4a = 2x$$
$$x = 2a$$

[56] Problème de la balance, Petit X, 32, 1992-1993, Philippe Clapponi, d'après une idée de Serge Cecconi.

**Stratégie par comparaison :** l'élève compare les éléments présents sur chacun des plateaux pour déduire le résultat. Mentionnons qu'il est difficile d'établir la distinction entre les stratégies 1 et 2 de ce problème étant donné que certains élèves peuvent barrer des items sur les plateaux alors qu'ils établissent une comparaison un à un.

« *Le poids d'un verre est égal à celui d'un autre verre, donc le poids de 2 bols sera égal à celui de 4 verres…* »

*Réflexion du type :*

$$5a = a + 2x$$

$$a + 4a = a + 2x$$

donc,

$$4a = 2x$$

$$x = 2a$$

**Stratégie qui consiste à donner une valeur fictive à une des masses afin de pouvoir opérer :** comme aucune valeur numérique n'est donnée dans le problème, certains élèves peuvent avoir tendance à donner un poids fictif pour la masse d'un objet afin de pouvoir déduire la masse de l'autre objet. « *Si un verre vaut 1 g, alors j'ai 5 g à gauche de la balance et 1 g plus le poids de 2 bols à droite. Cela veut donc dire que les 2 bols valent 4 g. Un bol vaut donc 2 g, ce qui est le double du poids du verre.* »

**Stratégie qui consiste à algébriser le problème** : l'élève pourrait fixer une variable comme étant le poids d'un objet et, en fonction des relations de poids qu'il observe sur les balances, former des équations qu'il résout.

*Par exemple :* *Soit « x » est le poids d'un verre et « y » le poids d'un bol*

*À partir du troisième équilibre, je peux former l'équation* :

$5x = x + 2y$

*Donc* $4x = 2y$

*Donc* $2x = y$

*Donc : le poids d'un bol « y » est deux fois plus grand que le poids d'un verre*

**Approximation en référence à la vie courante :** l'élève se réfère à ce qu'il connaît, c'est-à-dire que la masse d'un bol est généralement plus élevée que la masse d'un verre. Il peut alors donner une approximation de la comparaison entre les deux objets.

Pour la question b), les déductions à faire sont plus complexes. Il ne s'agit plus ici de faire une déduction simple à partir d'une seule balance, mais bien de faire une série de déductions à partir de différentes équivalences présentées par plusieurs balances. Voici donc une série de stratégies que les élèves peuvent employer.

**Déduction complète utilisant plusieurs équivalences** (les stratégies plus précises d'élimination ou de comparaison de a) sont réinvesties) : l'élève utilise plusieurs équivalences afin d'arriver à une solution. L'élève utilise la réponse trouvée en a) pour compléter la question b). Il effectue une sorte de substitution.

**Utilisation partielle des équivalences** (les stratégies plus précises d'élimination ou de comparaison de a) sont réinvesties) : l'élève utilise partiellement les équivalences données par les trois balances afin de déduire le résultat. On peut voir une amorce de déduction.

**Donner une valeur fictive** : l'élève donne un poids fictif pour la masse d'un objet afin de pouvoir déduire la masse de l'autre objet par des calculs.

**Poursuite de l'algébrisation du problème** : l'élève pourrait continuer de fixer des variables comme étant le poids d'un objet et, en fonction des relations de poids qu'il observe sur les balances, former des équations qu'il résout.

Pour la sous-question c), on demande à l'élève de créer son propre équilibre avec des cafetières et des assiettes. Cette question est plus complexe et demande de réinvestir les différentes déductions faites en a) et b). Voici certaines stratégies qui peuvent être employées par l'élève.

**Ramener tout en bols (pour pouvoir comparer et ajouter ce qui manque** : l'élève peut ramener les poids de l'assiette et de la cafetière en bols pour pouvoir comparer. Ensuite, il peut se demander ce qu'il faut rajouter à l'assiette pour avoir la même chose que la cafetière.

Une variante peut être faite après avoir ramené tout en bols. L'élève peut chercher un multiple commun aux poids des deux objets. La variante est de trouver un multiple commun entre 3 et 4 puisque le poids de la cafetière vaut 4 bols et celui de l'assiette vaut 3 bols. Le multiple 12 est une bonne solution et amène un équilibre entre 3 cafetières et 4 assiettes.

**Ramener tout en verres** : Tout comme dans la première stratégie, l'élève peut décider de ramener les poids d'une cafetière et d'une assiette en verres afin d'établir son équilibre.

**Utilisation des équivalences données dans les dessins** (sans se ramener dès le début à un seul objet de référence, comme dans les deux premières stratégies) : l'élève peut utiliser les équivalences données par les trois balances du problème. Entre autres, il peut partir du premier équilibre dans lequel il n'y a qu'une cafetière à gauche et des bols à droite et il ajoute graduellement des objets jusqu'à l'obtention de l'équilibre souhaité. Pour ce faire, il utilise les déductions trouvées en a) et b).

### *3.4.4.2 Conduites de communication anticipées pour l'ensemble de la situation*

Ce problème est proposé parce que qu'il amène une dimension différente de la communication jusque-là peu exploitée au travers les trois premières situations. Une augmentation de l'exigence de communication est vue, comparativement aux situations des *Allumettes* ou du *Magicien,* puisque les registres des dessins forcent les élèves à recourir à toutes sortes d'autres registres pour expliquer leur raisonnement. Les registres « algébriques », « en mots » ou « en dessin » peuvent être sollicités isolément ou ensemble. En effet, les élèves pourraient expliciter leur raisonnement par écrit en indiquant les relations déduites et la provenance de leurs déductions par des marqueurs de relation (donc…, alors…, ainsi…, etc.) dans le but de se faire comprendre.

Par ailleurs, n'ayant aucune référence numérique directe dans la question, le type de questions dans le problème oriente possiblement vers une élaboration plus poussée de l'argumentation (soit en mots, en dessins, avec des flèches, etc.) puisque les élèves ne peuvent faire reposer leur argumentaire sur la présentation de calculs, à moins de fixer des valeurs de poids aux objets présentés. Aussi, il se peut que le problème soit algébrisé par les élèves (l'élève peut avoir une réflexion du type « *puisque nous sommes dans le module de l'algèbre, il faut bien utiliser l'algèbre* »), c'est-à-dire qu'ils posent des variables comme étant les poids des objets représentés et qu'une résolution d'équations s'en suive, sollicitant ainsi une communication plus formelle.

Le support dessin présenté peut aussi mener les élèves dans une résolution centrée sur les objets représentés, particulièrement pour les questions a) et b) (hachurer des objets, indiquer des flèches ; des équilibres en dessins, etc.). Si cette résolution faite à partir des dessins est non explicite et davantage dans une phase d'action pour soi, les élèves risquent de perdre de vue l'interlocuteur (en restant dans l'implicite par rapport aux relations qu'ils dégagent). Leurs actions n'étant pas explicitées, il est alors difficile de comprendre les raisonnements en jeu. L'élève peut, en travaillant sur les dessins:

- utiliser des rayures ou hachurer certains objets sur les balances pour ensuite décrire ses actions par des mots ;
- établir des correspondances entre un ou plusieurs objets sur des balances par des flèches. Par exemple, il entoure deux verres sur la troisième balance et les associe à un bol. Il vient conclure son dessin par une courte explication ;
- il peut colorier les objets : les objets d'une même couleur auraient alors le même poids ;

Les conduites de communication anticipées rejoignent celles des situations de l'*Enseignant* et des *Allumettes*. Les voici à nouveau sommairement exemplifiées pour la sous-question c).

- **Description des actions|calculs** : l'élève narre son action sans apporter de justification. Par exemple, l'élève mentionne : « *J'ai mis 3 cafetières sur l'un des plateaux et 4 assiettes sur l'autre plateau* ».

- **Justification des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles ces actions sont posées, ce qu'elles visent (trouver ceci ou cela). Il peut aussi utiliser d'autres formes de représentation pour justifier ce qu'il avance : faire des flèches, des schémas, etc). Par exemple, l'élève mentionne : « *J'ai mis 3 cafetières sur l'un des plateaux et 4 assiettes sur l'autre plateau. À partir des autres balances, j'ai vu que le poids d'une cafetière valait 4 bols et que le poids d'une assiette valait trois bols. J'ai donc fait « x 4 » d'un côté et « x 3 » de l'autre côté pour avoir un équilibre.*

- **Validation des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles les actions sont valides et qu'elles conduisent bien au résultat cherché. Par exemple, « *pour former l'équilibre demandé entre des cafetières et des assiettes, j'ai comparé ces deux objets en « verres » et chercher le multiple commun entre les deux. Donc, des autres déductions trouvées en a) et b) :1 cafetière est égale à 8 verres; 1 assiette est égale à 6 verres. J'ai trouvé un multiple commun entre 8 et 6 qui est 24. En me posant la question « 8 multiplié par quoi donne 24 ? », j'ai trouvé 3. En me posant la question « 6 multiplié par quoi donne 24 ? », j'ai trouvé 4. Donc, 3 fois le poids d'une cafetière donne 24, de même que 4 fois le poids d'une assiette. Ainsi, on peut placer 3 cafetières d'un côté et 4 assiettes de l'autre* ».

### *3.4.5 La situation du Déménagement*[57]

*Figure 8 - Énoncé de la situation du Déménagement*

**Un déménagement pesant**

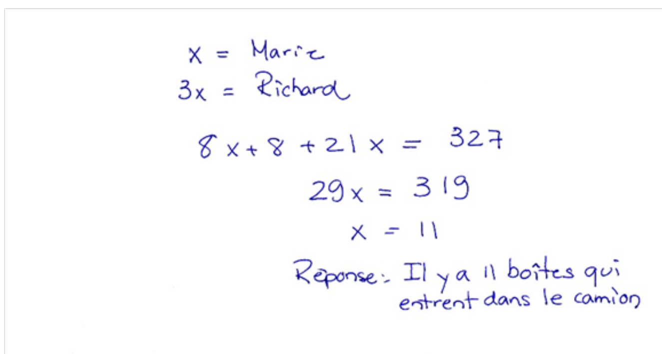
Renaud a affronté, lors de son épreuve de fin d'année, le problème suivant :

*Valérie et Éric déménagent. Lors du grand jour, leurs familles se chargeront de transporter les boîtes. La voiture de tante Marie peut contenir trois fois moins de boîtes que le camion de l'oncle Richard, mais Marie décide de déménager une boîte de plus en l'attachant sur le toit de sa voiture pour que ça aille plus vite.*

*En fin d'après-midi, il reste encore 25 boîtes dans l'appartement, malgré les 8 allers-retours de la voiture et les 7 allers-retours du camion.*

***Combien de boites peut contenir le camion de l'oncle Richard, si au total Valérie et Éric avaient 352 boîtes à déménager?***

La solution de Renaud est présentée ici :



x = Marie
3x = Richard

$8x + 8 + 21x = 327$

$29x = 319$

$x = 11$

Réponse : Il y a 11 boîtes qui entrent dans le camion

L'enseignant de Renaud est plutôt déçu de sa solution…. Il y trouve plusieurs bons éléments, mais il considère que Renaud n'a pas assez développé son raisonnement. Il donne à Renaud la note de 4/10 pour sa solution. Et toi ? Que penses-tu de la solution de Renaud ?

Ta tâche consiste à :

1- Dans un premier temps, résoudre le problème pour toi-même dans l'espace prévu à cet effet.
2- Dans un deuxième temps, tu dois analyser la solution de Renaud, c'est-à-dire y repérer les erreurs, les oublis, les précisions qu'il aurait dû faire, les calculs manquants, etc. <u>Explique bien à Renaud chacun des éléments que tu repères qu'il aurait dû ajouter pour obtenir un 10/10</u>.

La situation comprend deux parties:

[57] Problème adapté d'un problème du manuel *À vos maths* Vol. C, p.299, éditions Graphicor, 2006

**Partie 1 :** L'élève doit résoudre le problème pour lui-même ;

**Partie 2 :** L'élève décode la situation d'un élève-fictif et la commente.

*3.4.5.1 Stratégies mathématiques de résolution pour la première partie*

Les savoirs mathématiques en jeu et la communication à leur propos sont d'une exigence supplémentaire. En effet, l'élève doit identifier des inconnues et déterminer les relations qui les unissent, ce qui n'est pas si simple compte tenu de subtilités dans le texte présenté. La relation d'égalité que l'élève doit établir met aussi en relation deux moyens de transport qui peuvent contenir ou transporter un nombre différent de boîtes, des nombres distincts d'allers-retours pour chaque transport, et le nombre restant de boîtes à la fin de la journée (le nombre de boîtes totales déménagées). L'interprétation du texte et de la mise en relation des différentes contraintes pour arriver à une mise en équation est exigeante.

Outre l'établissement d'une équation adéquate, l'élève doit ensuite la résoudre tout en maintenant la relation d'égalité établie initialement et expliquant bien les étapes de résolution. En plus, selon les variables initiales déterminées, l'élève pourrait avoir à interpréter la valeur finale de sa variable à savoir s'il a trouvé le nombre de boîtes dans la voiture ou dans le camion. Dans le premier cas, il doit effectuer une opération pour répondre à la question (le nombre de boîtes que contient le camion de Richard). La résolution proposée introduit aussi l'usage des parenthèses pour représenter une variable et la distributivité, une opération qui peut s'avérer difficile pour des élèves qui sont en début de parcours algébrique.

- **Stratégie de résolution algébrique avec les méthodes en 5 étapes** : il s'agit d'une méthode de résolution algébrique structurée souvent enseignée. Premièrement, l'élève définit des inconnues et les écrits. Deuxièmement, il pose une équation qui traduit le problème. Troisièmement, il résout l'équation. Quatrièmement, il met en évidence sa réponse dans le contexte du problème (avec les unités). Finalement, il vérifie la réponse trouvée en la remplaçant dans l'équation. Les titres des étapes sont normalement explicitement écrits.

- **Stratégie de résolution algébrique plus personnelle, moins séquentielles :** l'élève résout le problème avec l'algèbre, mais de manière moins séquentielle. Il passe sensiblement par les mêmes étapes que la première stratégie, mais certaines d'entre elles sont implicites ou toutes les étapes y sont, plus désordonnées, et elles ne sont pas indiquées par des titres.

- **Séries d'essais numériques contrôlés ou non :** l'élève n'algébrise pas le problème, mais joue avec les données et leurs relations dans un ou plusieurs essais. Par exemple : « *Le camion de Richard contient 30 boîtes. L'auto de Marie en contient trois fois moins, donc 10. J'ajoute une boîte sur le toit de l'auto de Marie : 11. J'essaie : 7 x 30 + 8 x 11 = 298 boîtes déménagées. Il en reste 25. Mais 352 – 298 n'égal pas 25, mais 54. Il faut donc augmenter le nombre de boîtes dans le camion de*

*Richard »* (cette conclusion peut être faite si l'essai est contrôlé, sinon, l'élève peut essayer un nombre plus petit que celui de 30 boîtes initialement).

### *3.4.5.2 Conduites de communication anticipées pour la partie 1*

L'élève doit réaliser sa propre résolution. Ses traces de communication peuvent rester dans une sphère privée puisqu'il note pour lui les grandes lignes de la résolution tel que vu dans la situation de l'*Enseignant*. Au contraire, il pourrait adopter la posture d'un enseignant et être plus loquace et sortir tous les moindres détails de sa résolution pour avoir un meilleur appui pour l'analyse de la copie de Renaud et anticipant aussi les attentes de son enseignante régulière.

Pour résoudre ce problème, plusieurs décodages du registre en mots sont nécessaires pour bien modéliser la situation : « *trois fois moins de boîtes* » ; « *des allers-retours* » ; « *il reste 25 boîtes »* ; il y en avait 352 au total ; etc. La subtilité de la question amènera des élèves à tomber possiblement dans un piège. En effet, il est dit que la voiture de Marie « contient » (ce qui suppose à l'intérieur) trois fois moins de boîtes que le camion, mais elle en met une sur son toit. Cette dernière information doit être considérée dans la formulation de l'équation : l'auto de Marie transporte (x + 1) boîtes, mais en contient « x ».

- **Description des actions|calculs** : l'élève narre son action sans apporter de justification. Par exemple, l'élève pourrait poser adéquatement et précisément des variables. Inscrire ensuite correctement une équation (sans toutefois mentionner la provenance des coefficients des termes, ni de la valeur 327 (352-25, comme Renaud le fait). La résoudre correctement et ne rester qu'avec une réponse de la forme « x = 11 », sans unités, ni retour à l'énoncé. Il faut alors comprendre que l'élève vient de trouver la quantité de boîtes contenues dans la voiture.
- **Justification des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles ses actions sont posées, ce qu'elles visent (trouver ceci ou cela). Par exemple, l'élève pourrait faire les mêmes étapes que dans la stratégie précédente, mais en étant plus précis dans la provenance des coefficients des termes de l'équation (« le 8 représente les allers-retours de la voiture »), de la provenance du 327 et en inscrivant des unités à la réponse trouvée. Il pourrait même vérifier sa réponse dans l'équation posée.
- **Validation des actions :** l'élève donne les raisons pour lesquelles les actions sont valides et qu'elles conduisent bien au résultat cherché. Par exemple, l'élève fait les mêmes étapes que dans la stratégie de justification, mais va plus loin que la vérification de sa réponse dans l'équation. Il discoure sur cette réponse en mentionnant par exemple « qu'il est normal que la quantité de boîte dans la voiture soit inférieure que celle dans le camion ». Ainsi, l'élève ne se contente pas d'un simple remplacement de la réponse « mécaniquement » dans l'équation, mais il pose un regard sur la pertinence de sa réponse dans le contexte du problème.

### 3.4.5.3 *Conduites de communication anticipées pour la partie 2*

Dans cette partie, l'élève joue à l'enseignant de manière implicite et dans une situation de moindre envergure que l'*Enseignant*. Une seule résolution est à analyser : l'aspect comparatif entre deux élèves n'y est pas. Comme il a été mentionné dans le cadre de la situation de l'*Enseignant*, ce genre de problème permet à l'élève une prise de conscience sur sa propre résolution. Dû aux bons éléments de la résolution algébrique avancée par Renaud ou à des imprécisions, l'élève peut amorcer ou confronter ses propres calculs, équations et opérations. Encore une fois, le fait de présenter une production d'élève-fictif permet une relance de recherche de solution pour un élève qui est bloqué dans sa propre résolution. Cela amène aussi à poser un regard d'élève-enseignant sur une copie qui n'est pas la sienne et motive les élèves à s'attarder sur les détails de la solution proposée, notamment en termes du décodage des éléments de communication. Il est souhaité amener les élèves à être plus critiques par rapport à leurs résolutions futures et à donner des occasions à l'enseignante de revenir sur les stratégies qui auront émergées.

L'élève doit faire une analyse d'une production d'élève. Cette situation amène une grande part d'interprétation de différents registres (en mots et algébriquement) et de leurs enchaînements de la part de l'élève-enseignant. C'est particulièrement la mise en relations à partir du registre « en mots » qui s'avère complexe et contribue à l'augmentation de l'exigence de communication.

- En effet, l'élève-enseignant décodera les raisonnements mathématiques de Renaud en mettant en jeu ses propres connaissances mathématiques au service de son interprétation de sa production.
- Dans le décodage des productions de Renaud, l'élève-enseignant peut :
    - relever des conceptions erronées, des erreurs (par exemple, la définition imprécise des variables : « *x = Marie* », alors qu'on devrait lire « *x représente le nombre de boîtes contenues dans l'auto de Marie* ») ;
    - suggérer des pistes d'amélioration dans la présentation de sa stratégie (par exemple, « *dans la simplification de son équation, les opérations sont difficiles à suivre et il est donc laborieux de suivre son raisonnement* ») ;
    - inviter Renaud à une vérification[58] de la réponse (par exemple, « *que représente la valeur trouvée ? Es-tu certain d'avoir trouvé la bonne réponse en relisant le texte ?* ») ;

[58] Parfois, l'expression « validation de sa réponse » est aussi employée. Par contre, nous distinguerons les termes de « vérification » et « validation » en référant aux travaux de Coppé (1998) et Saboya (2010). Pour Coppé, « une vérification [est] tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur la réponse […] à ce moment-là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquérir la certitude, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification » (1998, p. 30). Nous reviendrons aussi sur le concept de validation en référant au contrôle syntaxique de l'élève en résolution de problèmes (Saboya, 2010; Saboya, Bednarz, Hitt, 2015).

- se positionner face à l'organisation de la communication de Renaud (par exemple, « *les étapes de Renaud sont difficiles à suivre : il ne met pas de titres* » ;

Enfin, une partie de cette situation est réalisée en dyade. Dans leurs interactions pour commenter la production de Renaud, les coéquipiers doivent interagir ensemble pour produire une solution écrite. À cet égard, les élèves entrent dans une phase de formulation pour s'expliquer les éléments qu'ils dégagent du problème et commentent la résolution de Renaud. Puisque la solution de Renaud est centrée sur un discours algébrique, les coéquipiers formuleront probablement des constats à l'égard des connaissances algébriques (mise en équations, opérations algébriques en jeu, etc.) mobilisées par Renaud. Il sera sans doute plus évident de discourir sur les éléments mathématiques de la réalisation puisque ces derniers sont plus explicites que dans la situation du *Magicien* où la collaboration entre deux élèves était aussi sollicitée, mais où aucune stratégie potentielle n'est montrée aux élèves.

### 3.4.6 *La situation des Équations*[59]

*Figure 9 - Énoncé de la situation des Équations*

Pour chacune des équations algébriques suivantes, tu devras commenter les productions des deux élèves et décider, à l'aide d'arguments, qui a le mieux réussi.

**Équation 1 :** $3x + 5 = 9x - 17$

| Solution de Mylène | Solution de Pascal |
|---|---|
| $3x + 5 = 9x - 17$<br>$-3x \quad -3x$<br>$5 = 6x - 17$<br>$+17 \quad +17$<br>$\frac{22}{6} = \frac{6x}{6}$<br>$3{,}6 = x$ | $3x + 5 = 9x - 17$<br>$5 - 6x = -17$<br>$22 - 6x = 0$<br>$x = \frac{6}{22}$ |

**Équation 2 :** $15 \cdot (12 - x) = 150$

| Solution de Mylène | Solution de Pascal |
|---|---|
| $15 \cdot (12 - x) = 150$<br>$180 - x = 150$<br>$-180 \quad -180$<br>$-x = 30$<br>$x = -30$ | $15 \cdot (12 - x) = 150$<br>Donc, $12 - x = 10$<br>$x = 2$ |

**Équation 3 :** $\frac{5}{7} = \frac{(9+x)}{21}$

| Solution de Mylène | Solution de Pascal |
|---|---|
| $\frac{5}{7} \overset{\times 3}{=} \frac{(9+x)}{21}$ (×3)<br>$9 + x = 15$<br>$x = 6$ | $\frac{5}{7} = \frac{(9+x)}{21}$<br>$5 \cdot 21 = 7 \cdot (9 + x)$<br>$105 = 63 + x$<br>$x = 42$ |

[59] Problème inventé, mais toutefois inspiré d'un article de Vlassis et Demonty. 2000. *Apprendre à résoudre des équations*. Synthèse de la recherche en pédagogie. N°231/98. Informations pédagogiques. N°50. pp. 35 à 42.

*3.4.6.1 Stratégies mathématiques de résolution pour l'ensemble de la situation*

**Pour la sous-question a)**

**<u>Résoudre une équation en ramenant les termes avec variables à gauche lors de la résolution</u>** : il s'agit de la méthode classiquement enseignée. On maintient l'égalité en opérant tout d'abord sur les termes avec la variable (souvent « x ») pour ramener les termes en « x » du côté gauche. Cette méthode fait apparaître un coefficient et une constante négative ce qui peut être embêtant pour certains élèves.

| | | |
|---|---|---|
| *Par exemple :* | Équation de départ : | $3x + 5 = 9x - 17$ |
| | | ***-9x - 9x*** |
| | Équation intermédiaire : | $-6x + 5 = -17$ |
| | | ***-5 -5*** |
| | Équation intermédiaire : | $-6x = -22$ |
| | Division du coefficient : | $x = -22/-6 = 22/6$ |

**<u>Résoudre une équation en ramenant les termes avec variables à droite lors de la résolution</u>** : dans ce cas-ci, cette méthode permet de rester avec un coefficient et une constante positive.

| | | |
|---|---|---|
| *Par exemple :* | Équation de départ : | $3x + 5 = 9x - 17$ |
| | | ***-3x - 3x*** |
| | Équation intermédiaire : | $5 = 6x - 17$ |
| | | ***+17 +17*** |
| | Équation intermédiaire : | $22 = 6x$ |
| | Division du coefficient : | $x = 22/6$ |

**<u>Série d'essais contrôlés ou non</u> :** l'élève essaie différentes valeurs de « x » dans l'équation jusqu'à trouver la valeur qui respecte l'égalité. Dans le cas présent, ce travail peut s'avérer plus difficile, car la valeur approximative du nombre cherché est 3,67 et il serait étonnant que des élèves travaillent dès le départ avec des essais de fractions.

**Pour la sous-question b)**

Mylène propose une solution plus classique avec une erreur de distributivité. Pascal, quant à lui, fait une déduction (en remarquant que la parenthèse doit être égale à 10 ; en ramenant l'équation sous la forme $15 \times Y = 150$, donc $Y = 10$). Il ne développe pas son équation. Sa résolution est toutefois plus efficiente et montre un certain recul préalable à la résolution. Il semble avoir une vision plus globale de l'équation. Étant donné la forte insistance lors de l'enseignement d'une méthode de résolution plus « classique », des élèves pourraient être tentés de nommer la solution de Mylène comme étant la meilleure puisqu'elle respecte les procédés établis.

**<u>Stratégie qui consiste à appliquer la distributivité et à résoudre l'équation en isolant la variable</u> :**

$$15 \cdot (12 - x) = 150$$
15 •12 – 15x = 150
180 – 15x = 150
***-180 - 180***
-15x = -30
x = -30\-15 = 2

**<u>Stratégie qui consiste à voir l'équation générale sous la forme 15 × Y = 150</u> :** conclure donc que Y = 10 et que x vaut 2 en résolvant (fort probablement sans laisser de traces de calculs dû à l'évidence de la résolution) l'équation 12 – x = 10.

**<u>Série d'essais contrôlés ou non</u> :** l'élève essaie différentes valeurs de « x » dans l'équation jusqu'à trouver la valeur qui respecte l'égalité. Dans le cas présent, ce travail est relativement simple à faire si l'élève a une vision générale de l'équation sans nécessairement s'engager dans la résolution par étape.

**Pour la sous-question c)**

Dans cette sous-question, Mylène arrive à la bonne réponse, alors que Pascal fait une erreur de calcul. Mylène recourt à la mise en commun au même dénominateur (moins classique pour les élèves du premier cycle) alors que Pascal utilise la technique du produit croisé (plus courante). Pascal oublie toutefois de distribuer le « 7 » à la parenthèse ce qui cause une erreur à la toute fin. Mais l'ensemble de sa production est assez clair quoique plutôt procédurale.

Le produit croisé étant souvent enseigné comme une technique, employée même à tort par les élèves en situation de non-proportionnalité, il est important que l'élève-enseignant puisse expliquer minimalement pourquoi le produit des *extrêmes* est égal au produit des *moyens* dans une proportion pour atteindre un niveau de validation de la technique.

Sinon, le raisonnement de Mylène paraît mieux appuyé avec son indication de « multiplication par 3 » laissant présager une mise en commun au même dénominateur, mais les élèves auront sans doute plus de difficulté à la comprendre et, conséquemment, ils pourront être tentés de choisir la stratégie de Pascal, malgré son erreur. Cela pourrait laisser présager que leur regard est porté davantage sur la démarche plutôt que sur la réponse.

**<u>Utiliser la technique du « produit croisé » et résoudre l'équation qui en découle</u>** : stratégie identique à Pascal, mais sans l'oubli de la distributivité.

**<u>Mise au même dénominateur des deux fractions présentées et constat de l'égalité des deux numérateurs</u>**: stratégie semblable à celle de Mylène.

**<u>Série d'essais contrôlés ou non</u> :** l'élève essaie différentes valeurs de « x » dans l'équation jusqu'à trouver la valeur qui respecte l'égalité, soit l'obtention de deux fractions équivalentes.

### *3.4.6.2 Conduites de communication anticipées pour l'ensemble de la situation*

La dernière situation proposée place encore une fois l'élève dans la position d'un enseignant-explicite, mais qui doit, cette fois-ci, prendre position sur des résolutions algébriques. L'idée étant d'amener l'élève à communiquer à propos de phases d'action de deux autres élèves fictifs. On souhaite ainsi faire émerger un discours des élèves plus près des savoirs mathématiques, de leurs propriétés, et de leurs relations. Par conséquent, cette situation amène l'élève-enseignant à décoder, commenter et à prendre position sur les productions de deux élèves-fictifs au regard de procédés algébriques dans des équations sans contexte. Le regard de l'élève-enseignant et, par conséquent sa prise de position, devrait reposer sur des arguments liés à l'efficacité de l'usage des savoirs, à leur exactitude et possiblement à leur conformité avec les attentes de l'enseignante (notamment la proximité avec le connu : les stratégies de résolution qu'ils ont apprises par exemple). Préalablement à leur prise de position, les élèves sont invités (ce n'est pas écrit explicitement) à faire leur propre résolution d'équation dans un espace prévu à cette fin. Le souhait était de voir si ces derniers considèrent important de laisser des traces de leur démarche pour mieux communiquer leur prise de position dans cette dernière situation. Cette situation vise à ce que l'élève-enseignant dépasse le stade de la vérification pour entrer dans une forme de validation en proposant dans sa résolution des arguments de prise de position. Une prise de position qui s'articule autour d'une validation proposerait des éléments de réponses aux questions « *voici ce que j'ai fait et pourquoi ?* » simultanément à des réponses à la question « *voici pourquoi je trouve telle solution meilleure?* ».

**Pour la sous-question a)**

Seule Mylène arrive à la bonne solution et elle a utilisé la méthode classique enseignée. Nous avons pris soin de laisser des étapes de résolution implicites à Pascal en lui faisant réaliser une solution hors-norme. On peut s'attendre à ce que les élèves optent pour la résolution de Mylène. Il sera toutefois intéressant de constater s'ils commenteront la résolution de Pascal puisque ce dernier aurait pu arriver à la bonne solution par sa stratégie.

Pour commenter et prendre position sur ces deux productions, les élèves pourraient :

- Réaliser eux-mêmes la résolution d'équation et s'y référer pour prendre position sur l'une des productions. D'une certaine façon, ils font un corrigé, un référent, pour juger les productions. A cet effet, la stratégie présentée par l'élève peut :
    - *être simplement des traces de sa résolution et laisser la responsabilité à l'interlocuteur de décoder ;*
    - *être une description de ses calculs ;*
    - *être une justification de ses calculs ;*
    - *être une validation des calculs (en référant aux propriétés et en vérifiant la réponse obtenue).*

- N'avoir aucune réalisation algébrique personnelle, mais commenter et prendre position sur les deux productions avec des arguments de plusieurs types. Par exemple, la prise de position peut être argumentée : *sur les pas de raisonnements des élèves; sur les registres algébriques en jeu et sur leur usage dans les résolutions ; sur la structure et la clarté des productions ; sur le niveau de formalisme en jeu dans chaque production ; sur les erreurs des élèves en montrant ou complétant les démarches qui auraient dû être faites ou en commentant en mots ces dernières; par des commentaires « en mots » sur la clarté des productions ou sur l'efficacité des stratégies ; par des symboles, par exemple « ? », pour montrer une incompréhension ; par des ratures sur les productions pour les substituer par les siennes (suggérer des améliorations) ; par l'inscription d'une note ou d'une cote seulement ; par un commentaire se centrant sur la réponse obtenue*.

Tous ces éléments de communication au service de la prise de position sont valables pour les sous-questions b) et c) et par conséquent ils ne seront pas répétés. Par contre, les équations étant différentes dans les autres questions, d'autres spécificités peuvent s'ajouter.

**Pour la sous-question b)**

Avec cette sous-question, on espère faire ressortir un tiraillement des élèves-enseignants entre la démarche et la réponse. D'un côté, une élève développe classiquement son équation, mais fait une erreur de distributivité. Elle n'a donc pas la bonne réponse.

De l'autre, Pascal voit l'équation plus générale et conclut (en indiquant bien un pas de raisonnement : « donc ») à une équation équivalente beaucoup plus simple ($12 - x = 10$) et arrive à la bonne réponse. Les élèves jugeront-ils les traces qu'il a laissées comme suffisantes ? Préféreront-ils Mylène qui, malgré son erreur, résout son équation d'une manière plus près de leur réalité ? Il sera intéressant de voir quelle est la place occupée par l'erreur dans la prise de position de l'élève-enseignant.

**Pour la sous-question c)**

Dans les deux résolutions d'équations, certaines étapes sont implicites. Mylène n'indique pas par exemple qu'elle déduit l'égalité des numérateurs. Pascal, quant à lui, ne fait aucune mention du produit croisé et n'indique pas de flèches pour illustrer sa distributivité.

### *3.4.7 Synthèse sur l'exigence de communication d'une situation à l'autre*

Les tableaux 6 et 7 ci-après synthétisent, dans un premier temps, les valeurs des variables générales pour les trois premières situations (tableau 6) et, dans un deuxième temps, pour les trois dernières situations (tableau 7). Dans ces tableaux, les phases des situations (action, formulation ou validation) sont identifiées pour chacune des sous-questions. Les chiffres servent à hiérarchiser les phases qui apparaissent potentiellement dominantes (chiffres 1 à 3) dans la situation. Par exemple l'inscription *1-Formulation*, *2-*

*Action* signifie que la phase dominante de la situation est une phase de formulation et que la situation comporte aussi une phase d'action.

À titre d'exemple, dans le tableau 6, à la sous-question a) de la situation des *Allumettes*, l'élève doit rechercher le terme d'une suite connaissant son rang et c'est en grande partie par des calculs qu'il résout et explique sa stratégie. Il s'agit alors principalement d'une situation d'action (**section 2.1.4**) d'où l'inscription *1-Action*. Remarquons aussi que, dans le tableau 6, pour la situation du *Magicien*, plusieurs types de situations apparaissent avec une valeur chiffrée. Par exemple, dans la sous-question a) du *Magicien*, les élèves s'engageront probablement dans une phase d'essais (*1-Action*) et arriveront peu à peu à dégager certains constats, notamment que le magicien « nous fait faire des opérations inverses », « que les opérations du magicien mènent toutes à 8 », etc. (*2-Formulation*). Les élèves doivent expliquer ensuite « mathématiquement » pourquoi il ne s'agit pas de magie ce qui peut inviter à une forme de validation (3) puisqu'ils devront, à ce moment, référer à des propriétés arithmétiques ou algébriques pour justifier leurs stratégies.

On retrouve également dans ce tableau une référence au « type de tâche » qui résulte du « genre de tâche » et de l'objet mathématique sur laquelle porte cette tâche. Référant à Chevallard, « un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié » (1998, p.2). L'auteur exemplifie : « Calculer... est un genre de tâches; calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical est un type de tâches » (Ibid.).

*Tableau 6 - Synthèse des valeurs des variables générales relatives aux trois premières situations*

| **Situations** | | **Valeurs des variables** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Sous-questions ou parties et phases associées** | **Type de tâche** | | | | | |
| | | **Genre de tâche** | **Objet mathématique de la tâche** | **Position attribuée à l'élève** | **Interlocuteur de l'élève** | **RR[60] du problème écrit** | **Travail seul ou en équipe** |
| *Allumettes* | a) 1-Action | Résoudre et expliquer | Recherche du terme connaissant le rang | Élève | Enseignante | Mots, dessins, nombres | Seul |
| | b) 1-Action | Résoudre et expliquer | Recherche du rang connaissant le terme | Élève | Enseignante | Mots, dessins, nombres | Seul |
| | c) 1-Validation | Dégager et Formuler | Le terme général d'une suite | Élève | Enseignante | Mots, dessins, nombres | Seul |
| | | | | | | | |
| *Magicien* | a) 1-Action 2-Formulation 3-Validation | Dégager et expliquer | Égalité nécessaire d'une identité algébrique | Élève | Enseignante | Mots, nombres | Seul. puis en équipe |
| | b) 1-Formulation 2-Validation | Produire et formuler | Une identité algébrique | Élève[61] | Quidam, coéquipier et enseignante | Mots, nombres | Seul, puis en équipe |
| | | | | | | | |
| *Enseignant* | Partie 1a) 1-Formulation 2-Action | Dégager et formuler | Le terme général d'une suite désordonnée | Enseignant-explicite | Lui-même | Mots, nombres, dessins | Seul |
| | Partie 1b) 1-Action | Résoudre | Recherche du rang connaissant le terme | Enseignant-explicite | Lui-même | Mots, nombres, dessins | Seul |
| | Partie 2 1-Validation 2-Formulation | Décoder et commenter | Solution par le périmètre et solution par l'aire | Enseignant-explicite | Élèves-fictifs | Mots, nombres, dessins, solutions d'EF[62] | Seul |
| | Partie 3 1-Validation 2-Formulation | Expliquer | Équivalence de deux solutions | Enseignant-explicite | Classe-fictive | Mots, nombres, dessins, solutions d'EF | Seul |
| | Partie 4 1-Validation 2-Formulation | Prendre position et expliquer son choix | Solution par le périmètre et solution par l'aire | Élève | Enseignante | Mots, nombres, dessins, solutions d'EF | Seul |

[60] Registres de représentations

[61] Bien que cette valeur de variable ne soit pas précisée dans le **tableau 5**, l'élève est aussi, seulement pour la question b), placé en position « d'élève-magicien » ce qui peut amener un défi supplémentaire de communication puisqu'il doit tenter de piéger une victime avec son tour de magie.

[62] Élèves-fictifs

*Tableau 7 - Synthèse des valeurs des variables générales relatives aux trois dernières situations*

| **Situations** | | | **Valeurs des variables** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Type de tâche** | | | | | |
| | **Sous-questions ou parties et phases associées** | **Genre de tâche** | **Objet mathématique de la tâche** | **Position attribuée à l'élève** | **Interlocuteur de l'élève** | **RR du problème écrit** | **Travail seul ou en équipe** |
| *Balance* | a)<br>1-Action<br>2-Formulation | Résoudre et expliquer | Exprimer une variable en fonction d'une autre dans un système de 3 équations à 4 inconnues | Élève | Enseignante | Mots et dessins (sans nombres) | Seul |
| | b)<br>1-Action<br>2-Formulation | Résoudre et expliquer | Exprimer une variable en fonction d'une autre dans un système de 3 équations à 4 inconnues | Élève | Enseignante | Mots et dessins (sans nombres) | Seul |
| | c)<br>1-Action<br>2-Formulation | Résoudre et expliquer | Exprimer une variable en fonction d'une autre dans un système de 3 équations à 4 inconnues et former un équilibre | Élève | Enseignante | Mots et dessins (sans nombres) | Seul |
| | | | | | | | |
| *Démé-nagement* | Partie 1<br>1-Action | Résoudre | Un problème écrit se ramenant à 2 équations à 2 inconnues | Élève | Enseignante<br>Lui-même<br>Coéquipier | Mots et nombres | Seul, puis en équipe |
| | Partie 2<br>1-Validation<br>2-Formulation | Décoder et commenter | Solution algébrique qui omet des pas de transformation | Enseignant-implicite | Élèves-fictifs | Mots, nombres et solution d'un élève-fictif | Seul, puis en équipe |
| | | | | | | | |
| *Équations* | a)<br>1-Validation<br>2-Formulation | Décoder, commenter et prendre position | Deux solutions à une équation de la forme : ax+b=cx+d | Enseignant-implicite | Enseignante | Équations alg. et solutions d'élèves-fictifs | Seul |
| | b)<br>1-Validation<br>2-Formulation | Décoder, commenter et prendre position | Deux solutions à une équation de la forme : a•(b-x)=c | Enseignant-implicite | Enseignante | Équations alg. et solutions d'élèves-fictifs | Seul |
| | c)<br>1-Validation<br>2-Formulation | Décoder, commenter et prendre position | Deux solutions à une équation de la forme : $\frac{a}{b} = \frac{(c+x)}{d}$ | Enseignant-implicite | Enseignante | Équations alg. et solutions d'élèves-fictifs | Seul |

L'analyse a priori des situations montre que les types de tâches et les valeurs attribuées aux variables ciblées répondent à la préoccupation d'accroître l'exigence de communication d'une situation à l'autre.

Si, dans une situation comme les *Allumettes*, l'élève peut se satisfaire de décrire ce qu'il fait, il ne peut se contenter d'une telle description lorsqu'il est confronté à des situations qui exigent de sa part une prise de position (*Enseignant*, *Déménagement* ou *Équations*). Dans ce deuxième cas, d'autres éléments de communication de plus haut niveau sont sollicités. L'élève n'est plus seulement en position de résoudre un problème (phase d'action), mais il doit décoder et se prononcer sur la validité des productions d'autres élèves (phases de formulation et de validation), qu'ils soient fictifs ou réels. D'une situation à l'autre, nous cherchons à rendre caduque la possibilité d'usage par l'élève de stratégies de communication de faible niveau hiérarchique, telles que la description ou la narration de ses actions. La préoccupation étant de forcer l'élève à entrer dans des stratégies de communication visant, à tout le moins, la justification et, au plus haut niveau, la validation, et ce, par un jeu sur les valeurs de plusieurs variables de conception à la fois.

Les situations proposées varient donc à la fois à partir des savoirs mathématiques sur lesquels elles sont construites (voir à cet effet le **tableau 5**), et aussi selon les différents éléments de communication potentiellement sollicités chez l'élève, tel que l'a mis en évidence l'analyse a priori.

Il faut maintenant identifier des moyens qui nous permettront d'organiser et de rendre éloquentes les données issues de l'activité mathématique et de communication des élèves.

## 3.5 Moyens retenus pour analyser l'activité mathématique et la communication écrite

Inspirés par les travaux sur la communication en mathématiques de Demers et Radford (2004) et les éléments théoriques issus des travaux de Chevallard (1991a; 1991b; 1998) et Balacheff (1987; 1988), nous avons choisi de développer une grille d'analyse (ouverte et avec une échelle critériée à quatre niveaux) pour réduire et colliger les données issues de l'activité mathématique et du travail de communication des élèves. Dans la sous-section qui suit, nous présentons comment la grille d'analyse s'est construite et a été mise à l'épreuve lors de la préexpérimentation afin de l'améliorer.

### *3.5.1 Préexpérimentation et construction de la grille initiale d'analyse*

La préexpérimentation vise, d'une part, à expérimenter la grille préliminaire d'analyse de la communication et de l'activité mathématique en vue de l'ajuster pour l'expérimentation et, d'autre part, à tester les six situations développées avec des groupes d'élèves de 3$^{e}$ secondaire. La préexpérimentation permet ainsi : un ajustement de la grille initiale par l'ajout des critères d'observation; d'apporter des précisions sur les descripteurs et de développer des éléments observables en lien avec chacun des descripteurs choisis. Certains éléments plus spécifiques à la préexpérimentation ne seront pas présentés dans cette section, mais bien à l'**annexe 4**.

Précisons aussi que dans cette section, nous expliquerons le processus de conception de trois grilles successives d'analyse de la communication : la grille initiale, la grille améliorée et la grille finale.

Le point de départ pour concevoir la grille initiale a été de poser les trois questions suivantes et de trouver les moyens de dégager et d'organiser les données à partir des raisonnements écrits des élèves :

1. *comment l'élève organise-t-il sa solution?*

2. *comment mobilise-t-il le savoir mathématique dans les situations ?*

3. *comment argumente-t-il sa solution mathématique ?*

Ces questions ont servi d'amorce à la conception d'une grille d'analyse ou de réduction des données.

*3.5.1.1 Les éléments théoriques sur lesquels s'appuie la grille initiale*

Pour organiser les critères d'analyse de la communication, nous nous sommes intéressés à l'évaluation critériée (Gerard et Van Lint-Muguerza, 2000) et à l'évaluation de la communication en mathématiques (Demers et Radford, 2004). Les travaux de Gerard et Van Lint-Muguerza ont permis de baliser le nombre de critères d'observation, de se questionner sur leur pertinence et sur leur indépendance.

Gerard et Van Lint-Muguerza (2000) précisent un certain nombre de critères à respecter lorsqu'on souhaite mettre en place des critères d'évaluation[63]. Les critères d'évaluation doivent être :

- « […] **pertinents**, c'est-à-dire qu'ils doivent permettre d'évaluer vraiment que la compétence est maîtrisée ou non et de prendre la bonne décision;
- **indépendants**, ce qui signifie que l'échec, ou la réussite, d'un critère ne doit pas entraîner automatiquement l'échec, ou la réussite, d'un autre critère […];
- **peu nombreux**, non seulement pour éviter la multiplication des points de vue étudiés et « l'infaisabilité » de l'évaluation, mais aussi parce qu'on risque de chercher en vain la perfection, l'oiseau rare satisfaisant à une quantité invraisemblable de critères dont l'indépendance serait d'ailleurs douteuse […]» (Gerard et Van Lint-Muguerza, 2000 rapportés dans Gerard, 2007, p. 7).

*3.5.1.2 Un premier critère: l'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité*

La communication que l'on souhaite observer s'inscrivant nécessairement dans une activité mathématique, il parait incontournable d'analyser, dans un premier temps, comment l'élève mobilise les savoirs mathématiques en jeu dans les situations proposées. *A-t-il correctement mobilisé les savoirs mathématiques ? Est-ce qu'il a réussi la situation ? L'élève utilise-t-il une stratégie mathématique adéquate ?* À partir de ces questions, nous avons déterminé un premier critère d'analyse, soit la mobilisation par l'élève du savoir mathématique. Nous appuyant sur les travaux de Demers et Radford (2004), nous avons retenu deux descripteurs, soit l'efficacité et l'exactitude pour qualifier le type de mobilisation du savoir effectué par les élèves.

Demers et Radford (2004) retiennent le descripteur d'exactitude pour décrire la syntaxe et les symboles mathématiques. Ils font ainsi référence aux conventions et à la terminologie mathématique utilisées par l'élève dans sa résolution et de l'efficacité comme descripteur pour décrire la stratégie utilisée

[63] Bien que notre but ne soit pas l'évaluation du niveau de compétence développé par l'élève, l'identification d'un niveau indique ce que la situation sollicite et permet de déployer.

pour résoudre un problème. Nous avons donc initialement transposé les descripteurs « efficacité » et « exactitude » pour qualifier la mobilisation par l'élève du savoir mathématique.

Ce premier choix a mené à distinguer deux concepts : l'efficacité et l'efficience qui sont deux descripteurs intimement liés. L'efficacité du savoir mathématique permettrait à l'élève d'aboutir à des résultats utiles. L'élève propose une solution qui arrive à une bonne réponse par sa mobilisation du savoir mathématique. Sa solution est donc efficace. L'efficience, quant à elle, est liée à la performance de la stratégie en amenant l'élève à la meilleure solution, soit la plus optimale (la plus rapide, celle avec le moins d'étapes, etc.)[64].

Pour rendre compte de l'exactitude, deux sous-descripteurs sont retenus : l'importance relative des erreurs commises par l'élève (mineure ou majeure) ainsi que la fréquence des erreurs commises dans la situation (*combien d'erreurs sont présentes dans la production de l'élève ?*). Ainsi, dans la grille initiale, ces descripteurs ont été déclinés comme le montre le **tableau 21** de l'**annexe 4**. Nous avons rassemblé ces deux éléments sous un seul et même descripteur pour simplifier la grille. Pour chacun des niveaux, il fallait donc déterminer des éléments observables (ce que l'on peut voir dans les productions d'élèves en fonction des situations) permettant de situer le niveau atteint par l'élève. De façon plus spécifique, le premier critère est développé tel que le montre le **tableau 22**.

Ainsi, en fonction de l'analyse a priori de chacune des situations, des erreurs mineures ou majeures ont été identifiées pour ensuite être hiérarchisées sur chacun des niveaux. De même, il fallait aussi trouver des éléments observables qui témoignent de l'efficacité et de l'efficience des élèves dans leur solution. C'est lors de la phase de préexpérimentation que des éléments observables sont trouvés pour préciser la grille à partir des stratégies mobilisées par des élèves de 3e secondaire, mais aussi à partir des stratégies anticipées lors de l'analyse a priori des situations.

Il semble aussi essentiel de différencier deux éléments importants en lien avec le savoir mathématique en contexte de production d'une solution : l'usage du savoir versus l'expression qui en est faite. Ainsi, l'usage du savoir paraît davantage relever du premier critère ciblé (*L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité*), tandis que l'expression, quant à elle, est liée à la volonté de l'élève de se faire comprendre. Elle relève donc, dans la grille préliminaire, de l'argumentaire avancée par l'élève dans sa résolution. Il s'agit du deuxième critère retenu et développé dans la grille.

[64] Pour distinguer les deux concepts, on peut penser au jeune élève qui, devant l'opération 24 x 7, utilise l'addition répétée (c'est efficace, mais peut-être moins efficient) ou un autre élève qui, devant la même opération, utilise l'algorithme traditionnel de la multiplication (un peu plus efficient) ou un autre encore, plus efficient, qui calcule mentalement « 25 x 7 » (175) et retire « 7 » puisqu'il l'a ajouté une fois de trop (réponse finale : 168).

#### *3.5.1.3 Un deuxième critère: l'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée*

Les situations développées visent à solliciter une communication riche, soit à favoriser l'émergence d'un discours argumentatif de niveau aussi élevé que possible. Balacheff (1987; 1988) suggère une déclinaison du raisonnement qui va de l'explication, à la démonstration en passant par les preuves, lesquelles peuvent être pragmatiques ou intellectuelles. Comme il nous a semblé ambitieux de viser à ce que les situations puissent permettre à l'élève d'atteindre le niveau de la démonstration, nous avons retenu des descripteurs qui nous paraissaient mieux adaptés au départ pour préciser les niveaux d'argumentation possibles des élèves soumis aux situations. Ces descripteurs sont : la rigueur et la structure de l'argumentation. La rigueur de l'argumentation s'est traduite en quatre niveaux, chacun mettant en jeu la référence aux règles et théorèmes et les éléments de validation en appui à la démarche.

Nous considérons aussi la structure de l'argumentation de l'élève, c'est-à-dire la façon dont il enchaîne les arguments, explicitement ou non. On cherche à repérer des éléments observables qui montrent que l'élève explique ses pas de raisonnement (Duval, 2000). Quatre niveaux sont aussi retenus pour rendre compte de ce descripteur.

Ainsi, la rigueur et la structure constituent les descripteurs du deuxième critère d'analyse lequel est formulé de la façon suivante : *l'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée*. Ces descripteurs sont présentés en détails au **tableau 23** de l'**annexe 4**.

Soulignons que nous avons amorcé la préexpérimentation en gardant en tête le système des quatre composants [*Tâches/Technique/Technologie/Théorie*] de la TAD qui permet de modéliser notamment la communication : plus l'élève entre dans un discours technologique ou théorique, plus son argumentaire est appuyé.

Bien conscient de l'imperfection de la grille quant aux descripteurs de l'argumentation, nous avons préexpérimenté les situations en gardant à l'esprit qu'il faut apporter des précisions sur ce critère.

#### *3.5.1.4 Un troisième élément à considérer: le niveau de formalisme en jeu dans la situation*

De la grille de Demers et Radford, nous avons aussi retenu les différents types de langage dans la classe de mathématiques dont, notamment, le langage formel. Le *Larousse* définit le formalisme comme étant le « respect scrupuleux des formes, des formalités » (en ligne), mais aussi, pour le domaine des mathématiques, comme une « doctrine selon laquelle les mathématiques consistent simplement en un jeu formel avec des symboles, dans lequel il ne saurait être question de vérité » (en ligne). Nous avons choisi de distinguer initialement ce critère de celui lié à l'argumentation mathématique puisque nous avons constaté que des élèves sont à même de développer un argumentaire rigoureux et structuré sans faire appel au langage symbolique. Ces derniers utilisent alors une série de mots, de phrases, très bien formulées et enchaînées, pour expliciter leur raisonnement.

Nous avons donc gardé à l'esprit cet élément lors de l'analyse des productions des élèves et nous avons essayé de voir comment le formalisme s'observe et se décrit dans la grille. Le critère lié au formalisme est resté « ouvert » lors de la préexpérimentation.

Le **tableau 24** de l'**annexe 4** résume les éléments retenus dans la première grille initiale d'analyse. Cette première grille, mise à l'essai pour chacune des situations lors de la préexpérimentation, a été validée par un contre-codage entre le chercheur et sa directrice pour s'assurer d'une validité des cotes attribuées.

*3.5.1.5 Ajustement des critères d'évaluation, des descripteurs et proposition d'une grille améliorée*

Nous avions préalablement ciblé certains éléments à considérer dans l'analyse des productions des élèves lesquels sont rassemblés sous deux critères :

1. *L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité*
2. *L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée*

Ces deux critères sont apparus, à la lumière des codages et contre-codages des copies-types, comme plutôt généraux et demandaient à être précisés. Au fur et à mesure aussi de l'analyse des copies des élèves, nous avons peaufiné les éléments observables pour chacun des descripteurs, et ce, pour chacune des situations.

Rapidement, sont apparues certaines limites à la grille. Ainsi, pour les situations de l'*Enseignant*, du *Déménagement* et des *Équations*, le besoin de consigner des éléments de communication dans une grille plus « ouverte » s'est fait sentir étant donné la prise de position demandée aux élèves. Les élèves mobilisaient des éléments de communication qui paraissaient importants à conserver. À titre d'exemple, lors de la passation de la situation de l'*Enseignant*, des élèves commentaient la copie de Maxime en lui indiquant que certaines étapes de son raisonnement étaient absentes ou imprécises, laissant ainsi voir les attentes de l'élève-enseignant quant à la communication de Maxime. D'autres sujets indiquaient des commentaires ou symboles directement sur les productions de Maxime et d'Amélie. Ces indications étaient de plusieurs ordres. Parfois, elles dénotaient un commentaire d'ordre affectif (*« Bravo, ta réponse est claire ! »).* D'autres fois, un aspect mathématique était ciblé par l'élève-enseignant (*« Attention à l'utilisation du symbole d'égalité »*). Dans la grille initiale, plus fermée, ces éléments étaient « perdus ». Il a donc fallu améliorer la grille initiale en y ajoutant un espace pour consigner ces éléments. Nous avons ensuite mis en place des catégories pour regrouper les commentaires écrits des élèves placés en position d'enseignants (voir à cet effet l'**annexe 8** et l'**annexe 9**).

Nous avons aussi constaté que des descripteurs étaient ambitieux et peu précis. Il était difficile de trancher, par exemple, si, pour une situation donnée, l'élève mobilise le savoir mathématique avec une « certaine » efficacité ou avec « efficacité ». Ainsi, cette déclinaison du savoir en quatre niveaux apparaissait inadéquate. Nous avons alors décidé de préciser si les savoirs mobilisés étaient vrais, faux ou partiellement vrais, tout en relevant les erreurs repérées.

Quant au niveau de formalisme en jeu dans les situations, nous avons choisi de le laisser ouvert afin de consigner tous les éléments de formalisme repérés.

Aussi, afin de documenter la deuxième question de recherche qui vise à savoir si l'enseignante s'empare d'éléments de communication mis en avant-plan par les élèves dans leur résolution, nous avons réservé un espace pour consigner des éléments « hors du commun » jugés intéressants à exploiter par l'enseignante lors de son retour en classe.

Afin d'établir certaines comparaisons entre les six situations, nous souhaitions que la grille améliorée développe des critères communs d'une situation à l'autre et qu'elle s'applique pour chacune des sous-questions d'une situation donnée. La grille initiale comptait alors trois critères d'évaluation communs:

- *Critère 1 - L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation*
- *Critère 2 - L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et pertinence*
- *Critère 3 - L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée (souci du lecteur)*

Dans la grille améliorée, les critères 1 et 3 se déclinent toujours sur quatre niveaux alors que le critère 2, quant à lui, est réduit à trois niveaux : la solution est bonne, partiellement bonne (c'est-à-dire que nous repérons des éléments venant appuyer un raisonnement vrai) ou fausse. De plus, dans ce critère, nous indiquons la stratégie mise en place par l'élève.

Le critère 1 considère la forme de la présentation de l'élève. Il s'agit de l'organisation générale de la production de l'élève. Nous tentons de répondre aux questions suivantes: *est-ce que je comprends ce qu'a fait l'élève ? Est-ce qu'il a montré toutes les étapes de sa résolution ?* Ce critère est indépendant de la validité de la solution et du discours puisqu'un élève peut très bien organiser sa présentation et argumenter une solution fausse.

C'est le critère 3 qui est lié à l'argumentation en jeu dans la situation et il a été peaufiné. On tente ici de voir si l'élève prend une distance par rapport à son discours privé (Coppé, 1998) pour considérer son interlocuteur et, à plus forte raison, le convaincre. Si l'élève atteint un niveau élevé d'argumentation (3 ou 4), nous précisons, dans la grille améliorée, si les arguments avancés sont vrais, faux ou partiellement vrais.

L'analyse des copies de la préexpérimentation a également fait voir la grande variété des registres de représentation exploités par les élèves en appui à leur raisonnement. En fait, on aurait dû s'y attendre étant donné leur rôle essentiel au travail de communication des élèves (voir **section 2.2.1**). Nous avons donc décidé d'ajouter, dans la grille améliorée, les types de registres en jeu dans les réalisations des élèves.

De plus, notons que nous avons ajouté une section à cette grille qui indique si la production de l'élève est complète ou non, c'est-à-dire si l'élève a inscrit une réponse à chacune des sous-questions posées ou non. Un endroit est prévu sur la grille pour écrire quelle question n'est pas complète. De même, pour les situations comportant deux ou trois sous-questions, il est apparu pertinent de distinguer les copies où la réponse est clairement argumentée en a) alors que la réponse est totalement absente en b). Nous avons alors choisi de coder et d'évaluer chacune des sous-questions. Par exemple, la grille utilisée pour évaluer le problème des *Allumettes* a été utilisée trois fois, soit une fois pour chacune des trois sous-questions du problème et nous avons consigné toutes les cotes attribuées dans un tableau Excel permettant une analyse plus fine des sous-questions.

Enfin, nous avons jugé utile de consigner le nombre d'élèves qui ont réussi ou échoué à une situation donnée.

C'est donc avec la grille d'analyse améliorée (**figure 55** de l'**annexe 4**) que nous avons recodé des copies-types d'élèves recueillies en phase de préexpérimentation afin de voir si les améliorations permettaient de mieux rendre compte de la communication déployée par les élèves.

*3.5.1.6 Proposition d'une grille d'analyse finale*

Pour chacune des situations préexpérimentées, le chercheur et sa directrice ont, de manière indépendante, à partir de la grille améliorée représentée à la **figure 55** réalisé des codages de copies d'élèves pour ensuite comparer les cotes attribuées par chacun aux différents critères. Cette opération permettait d'assurer une certaine validité aux critères de la grille. La rigueur du codage exige que celui-ci soit réalisé de manière constante, c'est-à-dire que les mêmes codes soient attribués aux mêmes unités de sens (Van der Maren, 1996). Or, après vérification de quelques copies, il est apparu difficile de discriminer les descripteurs du critère « *L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée (souci du lecteur)* ».

Dans la grille améliorée, l'argumentation comportait trois descripteurs : les objets mathématiques, le discours de l'élève et la structure des arguments. L'usage (adéquat ou non) des objets mathématiques était déjà pris en compte dans le deuxième critère de la grille, soit celui en lien avec les stratégies en jeu, puisque nous précisions la présence d'erreurs ou non et de stratégies vraies ou fausses. Il devenait donc inutile de le considérer de nouveau.

Dans la grille améliorée, l'argumentation comportait trois descripteurs: les objets mathématiques, le discours de l'élève et la structure des arguments. L'usage (adéquat ou non) des objets mathématiques était déjà pris en compte dans le deuxième critère de la grille, soit celui en lien avec les stratégies en jeu, puisque nous précisions la présence d'erreurs ou non et de stratégies vraies ou fausses. Il devenait donc inutile de le considérer de nouveau.

Aussi, ce qui paraissait influencer la structure des arguments était lié à la prise en compte (ou non), par l'élève, de son interlocuteur dans son argumentaire. En effet, la structure des arguments apparait intimement liée au désir de se faire comprendre. Ainsi, nous avons précisé le descripteur du discours en y ajoutant la prise en compte de l'interlocuteur.

Au final, le troisième critère de la grille a été légèrement modifié en conséquence donnant lieu à la grille d'analyse finale qui a servi à l'expérimentation. La **figure 56** de l'**annexe 4** montre comment le critère a été modifié.

#### *3.5.1.7 La grille finale d'analyse de l'activité mathématique et de la communication des élèves*

La figure 10 présente la grille d'analyse finale pour la situation de l'*Enseignant*.

*Figure 10 - Grille finale d'analyse de l'activité mathématique et de la communication pour la situation de l'Enseignant*

**SUJET :** ____________ **SITUATION :** __________ **La production de l'élève est : Complète ?** ☐ **Incomplète ?** ☐ **Précisez :** ☐

| **Critères d'évaluation** | **Niveau 1** | **Niveau 2** | **Niveau 3** | **Niveau 4** |
|---|---|---|---|---|
| **Critère 1**<br>L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation | La présentation de l'élève est minimale : pratiquement aucune traces de résolution ne sont laissées. | La solution de l'élève est partielle : plus d'une étape est absente. Il est difficile de repérer les étapes de la réalisation. | La séquence de sa réalisation est facilement identifiable. La présentation de sa solution est toutefois incomplète (au moins une étape est absente). | La solution de l'élève est complète. L'élève identifie la séquence de sa réalisation (jusqu'à sa réponse). |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Critère 2**<br>L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et pertinence | La solution de l'élève est fausse et repose sur la stratégie ____________<br>Règle sous-jacente : ____________<br>Erreurs sous-jacentes : ____________ | La solution de l'élève est partiellement vraie et repose sur la stratégie ____________<br>Règle sous-jacente : ____________<br>Erreurs sous-jacentes : ____________ | La solution de l'élève est vraie et repose sur la stratégie ____________<br>Règle sous-jacente : ____________ |

| L'élève, dans sa résolution, utilise les registres suivants : | Registre naturel, écrit, en mots | Registre algébrique | Registre schématique/travail sur le dessin | Registre sous forme de tableau | Autre registre (spécifiez) : ____________ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

| | **Niveau 1** | **Niveau 2** | **Niveau 3** | **Niveau 4** |
|---|---|---|---|---|
| **Critère 3**<br>L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée<br>(souci du lecteur) | **$D_1$ : Discours de l'élève**<br>L'élève ne laisse aucune trace de son discours. | **$D_1$ : Discours de l'élève**<br>L'élève amorce un discours, mais les traces sont difficiles à percevoir, à décoder. L'élève reste ostensif, il montre, sans vraiment expliciter.<br>Au sens de Chevallard, il ne demeure que dans la technique. | **$D_1$ : Discours de l'élève**<br>Au sens de Balacheff, l'élève explique sa solution.<br>Au sens de Chevallard, il amorce un discours sur ses techniques (technologie). Il cherche à rendre intelligible son discours pour lui. | **$D_1$ : Discours de l'élève**<br>Au sens de Balacheff, l'élève tente de prouver sa solution.<br>Au sens de Chevallard, il élabore un discours riche sur ses techniques (technologie). Il cherche à rendre intelligible son discours pour autrui. |

| Puisque l'élève atteint un niveau 3 ou 4 pour son discours, les arguments avancés sont : | | |
|---|---|---|
| | Vrais | Expliquez : |
| | Faux | Expliquez : |
| | Partiellement vrais | Expliquez : |

| | |
|---|---|
| L'élève a eu recours au langage formel dans sa production. Précisez certains éléments. | |
| La production de l'élève permet de sortir un **<u>élément à exploiter</u>** lors de l'enseignement. Précisez lequel.<br>Comment sera-t-il exploité lors d'une prochaine période d'enseignement ? | |
| Un **<u>élément hors du commun</u>** est ressorti de la production de l'élève.<br>Précisez lequel. | |
| À la question 3, l'élève fait ressortir les éléments suivants : | |
| À la question 4, l'élève fait ressortir les éléments suivants : | |
| Sur les copies de Maxime (M) et Amélie (A), l'élève fait les commentaires/actions suivant(e)s : | |

Décrivons la grille d'analyse conçue.

- La grille permet de consigner des informations pertinentes via des parties plus « ouvertes » (*la présence du formalisme*, *un élément à exploiter lors du retour* et *un élément hors du commun*).
- Chaque situation possède sa propre grille d'analyse avec une partie spécifique[65] à la situation et une partie générique[66].
- Deux critères d'évaluation communs aux six situations sont déclinés sur une échelle de 1 à 4, permettant une comparaison d'une situation à l'autre:
  - *Critère 1 - L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation*
  - *Critère 3 - L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée (souci du lecteur)*
- Le deuxième critère (*L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et pertinence*) est, quant à lui, décliné sur trois niveaux : la stratégie est vraie, partiellement vraie ou fausse[67]. Dans cette section, la stratégie utilisée par l'élève est inscrite de même que les conceptions erronées repérées.
- Pour les situations de l'*Enseignant*, du *Déménagement* et des *Équations*, les arguments avancés par les élèves, alors en position d'enseignants (explicitement ou implicitement), sont tous consignés dans des sections ouvertes de la grille.
- Pour le critère 3 lié à l'argumentation, une section ouverte permet de d'écrire si, pour un élève ayant atteint un niveau 3 ou 4 d'argumentation, les arguments avancés sont vrais, partiellement vrais ou faux[68].
- La grille contient également une section ouverte qui permet de noter les registres de représentation qui sont utilisés par l'élève à des fins de résolution, et non pas uniquement à des fins de présentation de la réponse.
- La production de l'élève à une situation donné est dite « complète » si l'élève indique une réponse à chacune des sous-questions de la situation à défaut de quoi, elle est classée « incomplète ».
- Enfin, cette grille est utilisée pour coder et consigner les informations pour chacune des sous-questions (a), b) et c)) des situations proposées.

---

[65] Dans l'exemple précédent, le deuxième critère met en évidence la stratégie pour résoudre la situation, laquelle repose sur une règle. Les sections ouvertes relatives aux questions 3 et 4 et aux éléments repérés sur les copies de Maxime et d'Amélie sont aussi spécifiques à la situation de l'*Enseignant*.

[66] Toujours dans l'exemple précédent, les critères 1 (organisation) et 3 (argumentation), les registres utilisés pour résoudre la situation, la place du formalisme, les éléments à exploiter lors du retour et les éléments hors du commun repérés dans la réalisation de l'élève sont, quant à eux, génériques, c'est-à-dire qu'ils reviennent d'une situation à l'autre.

[67] Dans l'analyse des résultats, nous avons préféré utiliser les expressions « stratégies adéquates, partiellement adéquates et inadéquates » puisque les stratégies ont généralement un domaine de validité, donc un espace où elles sont « vraies », mais lorsqu'elles sont utilisées en dehors de ce domaine elles deviennent inadéquates au problème posé, sans être pour autant « fausses ».

[68] En effet, ce n'est pas parce que l'élève présente un haut niveau d'argumentation que ses arguments sont nécessairement vrais. Nous distinguons le niveau d'argumentation et la véracité des arguments avancés dans la grille finale.

Pour consigner les informations recueillies à partir des productions des élèves, un fichier Excel a été créé afin de synthétiser toutes les cotes attribuées aux élèves de chacun des groupes, pour chacune des sous-questions des situations (voir l'**annexe 5**).

Pour aider à comprendre l'usage de la grille d'analyse, des exemples de codages de copies-types d'élèves sont présentés à l'**annexe 6** en indiquant à quels niveaux ils sont situés et quelles informations sont extraites de l'analyse pour les sections ouvertes. Trois exemples sont présentés issus respectivement de la situation des *Allumettes*, du *Magicien* et de l'*Enseignant*.

### *3.5.2 Cueillette des traces écrites laissées par des élèves-enseignants sur les copies d'élèves-fictifs*

La situation de l'*Enseignant* invite explicitement les élèves à adopter une position d'enseignant. Ces derniers doivent alors commenter les productions des élèves-fictifs. Dans la situation du *Déménagement* et des *Équations*, les élèves doivent aussi se prononcer sur les raisonnements d'élèves-fictifs (Renaud, Mylène et Pascal) mais sans être invités à adopter le rôle d'enseignant, ils sont alors dans une position implicite d'enseignant.

Dans les situations du *Déménagement* et de l'*Enseignant*, les élèves communiquent par écrit sur les copies des élèves-fictifs, témoignant d'un engagement des élèves-enseignants dans la position attribuée. Dans la situation des *Équations*, aucun élément de communication (notes; commentaires affectifs; corrections directement dans les équations; etc.) n'est inscrit sur les productions de Mylène et Pascal, les élèves-enseignants (implicites) ne laissant que leur prise de position écrite.

La nature des traces laissées par les élèves-enseignants sur les copies d'Amélie, Maxime (*Enseignant*) et Renaud (*Déménagement*) pouvant être variée, des catégories[69] sont initialement créées, à partir de la préexpérimentation, afin de coder les éléments de communication qui émergent des corrections et rétroactions auprès des élèves-fictifs. Les catégories préliminaires retenues pour classifier les traces laissées par l'élève-enseignant (EE) sur les copies d'Amélie, de Maxime et de Renaud sont présentées et explicitées à l'**annexe 7**).

Après avoir catégorisé les différentes traces de communication laissées par les élèves sur les copies des élèves-fictifs, une autre catégorisation est définie, à partir des données de la préexpérimentation, pour

[69] À la **section 3.8.3**, nous définirons le concept de catégorie adopté et les principes qui ont guidé le codage.

coder, cette fois, les types d'arguments avancés pour les situations de l'*Enseignant* et du *Déménagement* et des *Équations*. L'**annexe 8** présente ces catégories.

### 3.5.3 *Les éléments de communication laissés par les élèves-enseignants sous l'angle des dimensions sémantique et syntaxique*

La situation du *Déménagement* demande un important décodage du registre en mots pour déduire plusieurs relations algébriques. L'angle du contrôle sémantique et syntaxique des élèves est apparu intéressant pour faire l'analyse des productions des élèves[70], puisqu'il s'agit ici d'une tâche impliquant la mise en équation d'un problème écrit.

En effet, Saboya (2010) s'est intéressée à l'analyse du contrôle sémantique et syntaxique d'élèves résolvant des problèmes algébriques. Le contrôle sémantique, dans le cadre de la résolution de problèmes, s'appuie sur une compréhension des relations par les élèves entre les données et les notations symboliques qui y sont associées. Bednarz et Saboya (2007) précisent que la phase de mathématisation, ou en d'autres termes la mise en équation, requiert « un contrôle sémantique s'articulant sur une signification contextuelle des grandeurs en présence, des relations et des transformations » (2007, p. 148, cité dans Saboya, Bednarz, et Hitt, 2015).

Lorsque les élèves résolvent une équation, un autre type de contrôle intervient : le contrôle syntaxique. Bednarz et Saboya mentionnent que dans ce cas la « résolution s'appuie sur un travail sur des expressions algébriques, qui a une certaine signification bien sûr, mais dans un autre registre (des transformations sur des quantités sont ici effectuées de manière à conserver l'égalité) » (p. 148, cité dans Saboya, Bednarz, et Hitt, 2015).

Les dimensions du contrôle sémantique et syntaxique apparaissent ainsi intimement liées à des aspects importants de la communication, notamment le décodage et le recodage de même que la validation. En effet, dans la situation du *Déménagement*, la dimension sémantique réfère au décodage du registre écrit par les élèves pour passer au recodage dans le registre algébrique de même qu'à la validation de ce recodage. Il s'agit en quelque sorte d'un travail de traduction. La dimension sémantique concernant ce que les élèves dégagent du problème et la façon dont ils le traduisent algébriquement. La dimension syntaxique est aussi liée à la communication puisque, selon l'organisation qu'elle donnera à voir ou selon l'enchaînement des équations, la solution algébrique produite par les élèves témoignera d'un contrôle syntaxique plus ou moins affirmé.

Le cadre d'analyse conceptuel du contrôle développé par Saboya (2010) pour analyser finement le contrôle sémantique et syntaxique d'élèves en résolution de problèmes algébriques apparaît donc pertinent

[70] Il s'agit de la seule situation qui n'a pas fait l'objet d'un retour par l'enseignante.

pour analyser les productions issues de la situation du *Déménagement*. On peut aussi voir un intérêt à l'usage des dimensions sémantique et syntaxique pour catégoriser les éléments de communication laissés par les élèves-enseignants. Les commentaires et prises de position peuvent relever davantage de la dimension sémantique ou syntaxique, les éléments de communication avancés donnant ainsi des indices sur ce qui est important pour les élèves-enseignants, mais aussi, et surtout, sur ce qui peut être travaillé par l'enseignante.

Pour Saboya (2010), le cadre d'analyse du contrôle en résolution de problèmes algébriques présente plusieurs composantes : *l'anticipation des conditions de validité du résultat; la vérification du résultat et de la démarche; la perception des erreurs; la sensibilité et le dépassement de la contradiction*[71]*; l'engagement réfléchi, c'est-à-dire une prise de distance avant, pendant et après la résolution; le discernement et le choix éclairé vis-à-vis les différentes stratégies.* Ces différents éléments serviront lors de l'analyse de la situation du *Déménagement*.

Les moyens retenus pour faire la réduction des données afin d'observer la communication écrite des élèves viennent d'être présentés. Principalement, les données réduites proviennent d'une grille d'analyse construite avec des dimensions à la fois ouvertes et fermées. En parallèle aux données consignées dans la grille, des catégories préliminaires ont été développées pour analyser les éléments de communication et les commentaires pour justifier les prises de position laissées par les élèves-enseignants par rapport aux productions d'élèves-fictifs.

Toutes ces données ont pour objectif de trouver des réponses à la première question de recherche qui vise à savoir si les situations conçues ont sollicité une communication mathématique riche de la part des élèves.

La prochaine section présente les moyens qui permettront d'analyser les interactions orales qui ont eu lieu dans l'expérimentation.

## 3.6 Moyens retenus pour analyser les interactions orales

### *3.6.1 Les interactions orales enregistrées pour les situations du Magicien et du Déménagement*

Deux situations sont réalisées individuellement et en dyades : le *Magicien* et le *Déménagement*. Trois équipes, une forte, une moyenne et une faible, sont ciblées par l'enseignante en fonction de leurs résultats scolaires en mathématiques dans chacune des classes. Ce sont les équipes que l'enseignante forme dans le déroulement habituel de sa classe. Les interactions orales de ces six équipes sont enregistrées.

[71] Référant aux travaux de Piaget (1974), Karggiotakis (1996) et Hitt (2002), Saboya explique qu'il peut subsister un conflit entre les attentes de l'élève et un résultat attendu. À ce moment, l'élève doit entreprendre une action pour rétablir l'équilibre et dépasser le conflit ressenti. Piaget fait une distinction entre la sensibilité à une contraction et son dépassement : des élèves peuvent être conscients d'une contradiction, mais n'arrivent pas à la dépasser puisque « un effort supplémentaire de réflexion rétroactive » est exigé (Piaget, 1974, pp. 11-12).

Certaines interactions vont permettre une analyse des échanges lors de la réalisation des deux situations en vue d'apprécier l'impact du travail dyadique sur l'activité mathématique et la communication, mais plus particulièrement sur l'argumentation en jeu dans les productions écrites des élèves.

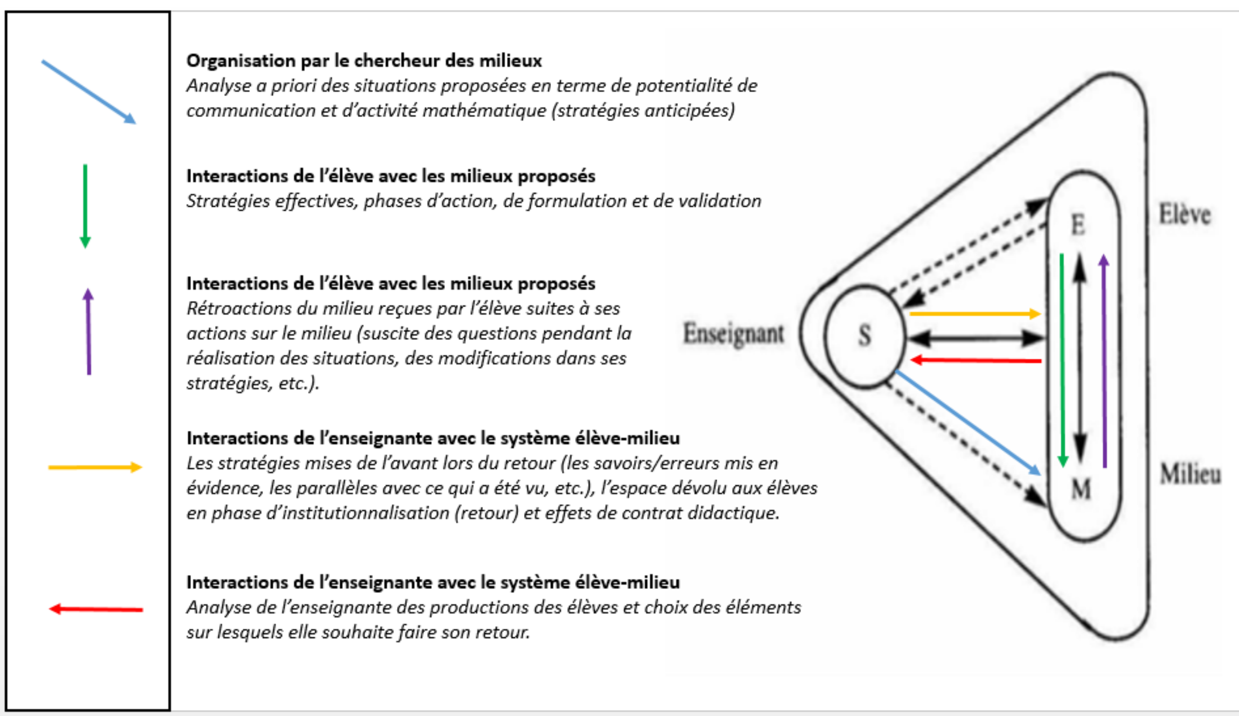
La prochaine sous-section précise comment seront analysées les interactions orales entre l'enseignante et les élèves dans les phases des retours permettant ainsi de chercher des réponses à la deuxième question de recherche : *Quels éléments de communication laissés par les élèves, à la suite de leurs interactions dans les situations proposées, et non anticipés par l'enseignant, semblent pris en compte lors des retours avec les élèves ?*

### *3.6.2 Modèle des interactions en jeu dans l'expérimentation*

Avant d'entrer directement dans les moyens retenus pour observer la rétroaction de l'enseignante, il apparaît opportun de présenter un modèle qui guidera l'analyse des données recueillies dans l'expérimentation pour avoir une vision d'ensemble de toutes les interactions en jeu dans les situations.

La **figure 1** qui modélise la situation didactique sert de modèle pour schématiser l'ensemble des interactions de l'expérimentation. La figure 11 présente un modèle (par des flèches colorées accompagnées d'une description) que nous décrivons ci-après.

*Figure 11 - Modèle pour guider l'analyse des interactions en jeu dans l'expérimentation à partir du schéma de la situation didactique de Brousseau (1998, p. 92)*



Le modèle de la figure 11 est relativement ambitieux en raison du fait qu'il distingue des éléments observables de l'expérimentation pour chacun des sens des doubles flèches du schéma initial (les deux flèches noires, verticale et horizontale, à double sens).

La flèche bleue représente la conception des situations et leur analyse a priori laquelle fait ressortir les potentialités d'activité mathématique (stratégies mathématiques anticipées) et de communication des situations à partir de choix et de valeurs de variables. Il s'agit donc du milieu que proposera l'enseignante aux élèves.

La flèche verte, quant à elle, représente les interactions de l'élève avec les milieux proposés. Les traces qui témoignent de ces interactions proviennent essentiellement des productions écrites, soit des données consignées à partir de la grille d'analyse et des codages des éléments de communication laissés par les élèves.

La flèche mauve représente les actions des élèves pendant la réalisation de la situation. Ces actions peuvent être notamment observées à travers les séances filmées des phases de réalisation ou via les notes issues du journal de bord du chercheur.

Les interactions représentées par les flèches verte et mauve donnent aussi des indices sur la dévolution qui s'opère dans les situations. Les élèves sont-ils engagés dans la situation, non uniquement par des effets du contrat didactique (pour plaire à l'enseignante par exemple), mais aussi parce qu'ils sentent la responsabilité d'arriver à une solution en mobilisant leurs connaissances mathématiques ? Dans la figure 11, la dévolution est observée et inférée des traces écrites laissées par les élèves, témoignant du niveau d'engagement et de responsabilisation des élèves dans la recherche de différentes stratégies.

Les interactions représentées par les flèches jaune et rouge sont plus directement en lien avec la présente section qui cherche à analyser la phase de retour de l'enseignante. La flèche jaune représente les actions de l'enseignante, les stratégies qu'elle choisit de travailler, l'espace qu'elle cherche à dévoluer aux élèves, etc. La flèche rouge représente ce que l'enseignante recueille de l'interaction élèves-milieu et qui se donne à voir par l'intermédiaire de ses actions ou des commentaires dans son journal de bord.

### *3.6.3 Les différents éléments non anticipés qui font l'objet d'un retour*

L'un des apports possibles de l'exploitation de la communication en classe est que l'enseignante puisse mieux comprendre ce que ses élèves apprennent en mathématiques. Il semble donc tout naturel d'analyser les interactions axées sur les savoirs en jeu dans les situations. L'analyse se centrera sur les éléments qui n'ont pas été anticipés par l'enseignante, montrant ainsi que les situations ont nourri son retour. Ainsi, premièrement, il est d'intérêt d'observer les stratégies et raisonnements mathématiques choisis par l'enseignante lors de son retour. Les tableaux des différentes stratégies effectives pour chacune des situations présentés à l'**annexe 13** et les verbatim des phases de retour seront utiles pour cette analyse.

### *3.6.4 Les séances filmées des phases de retour de l'enseignante*

Après la passation d'une situation, l'enseignante doit analyser les productions écrites des élèves afin de construire la séance d'enseignement des retours. La gestion didactique faite par l'enseignante pour revenir sur les situations est à sa discrétion. Cette partie de l'expérimentation est représentée par la flèche rouge dans la figure 11.

Les phases de retour des situations sont filmées et retranscrites sous forme de verbatim. Les verbatim permettent alors une analyse fine visant à repérer les interactions entre les élèves et l'enseignante, notamment les questions posées, les stratégies qui font l'objet d'un retour, la prise en compte des conceptions erronées des élèves, etc.

D'autres données sont également considérées pour répondre à la deuxième question, notamment les réponses de l'enseignante à des questions de préentrevue et les réflexions que l'enseignante consigne dans son journal de bord après les retours pour chacune des situations.

### *3.6.5 La préentrevue avec l'enseignante*

Avant de débuter l'expérimentation, les six situations sont remises à l'enseignante pour qu'elle en prenne connaissance et, par la suite, une préentrevue est menée et enregistrée. Les deux questions suivantes sont posées à l'enseignante afin de connaître ses impressions, ses attentes et ses anticipations à l'égard des six situations:

1. *Quelles sont les principales difficultés que vous entrevoyez dans chacune des situations, pour chacun des deux groupes (si les difficultés sont distinctes d'un groupe à l'autre) ?*
2. *Selon vous, quels seront les principaux raisonnements ou stratégies de résolution des élèves qui émergeront de la résolution de chacune des situations ?*

À la suite de sa lecture des situations l'enseignante n'a pas jugé utile de modifier ou d'ajuster les énoncés[72], malgré que nous ayons montré une ouverture à recevoir ses commentaires. Pour chacune des situations, les réponses de l'enseignante sont consignées par écrit par le chercheur sous forme de propos rapportés. Les réponses de l'enseignante sont des données qui permettent de cibler ce qu'elle avait anticipé. Les attentes et les anticipations de l'enseignante permettent d'identifier ce sur quoi l'enseignante revient effectivement dans son retour et qu'elle n'avait pas anticipé. La comparaison entre les attentes et les

[72] Par contre, notons dès maintenant que lors de la passation de la situation de la *Balance* aux élèves du groupe SÉ, confrontée à plusieurs questions quant à la formulation « *peux-tu comparer…* », elle a indiqué aux élèves des deux groupes, de changer cette expression pour « *compare…* ». En effet, dans la première formulation, les élèves répondaient par « oui » ou « non » à la question alors que le souhait était d'amener les élèves à poser une action, soit à comparer effectivement les masses des objets.

anticipations et ce qui est réellement fait par l'enseignante en phase de retour (et qui n'a pas été anticipé) permet de voir si les productions des élèves lors de la réalisation des situations sont utiles à l'enseignante pour développer l'activité mathématique des élèves lors des retours.

#### *3.6.6 Le journal de bord de l'enseignante*

Suite au retour sur chacune des situations, l'enseignante doit répondre à une série de questions synthèses sur l'ensemble de la situation. Les réponses sont consignées dans un journal de bord et présentées à l'**annexe 9**. Les informations données par l'enseignante viennent alimenter l'analyse. Ce sont des informations « à chaud » qui sont obtenues juste après les phases des retours qui terminent chacune des situations. Elles sont complémentaires aux informations du chercheur qui assiste aux phases de réalisation et de retour. Elles sont le point de vue de l'enseignante, écrites sans influence du chercheur. Les réponses données par l'enseignante à chacune des questions sont retranscrites intégralement à l'**annexe 10** pour chacune des situations. De plus, une synthèse des réponses de l'enseignante à chacune des questions posées dans le journal de bord et pour chacune des situations est montrée à l'**annexe 11**.

#### *3.6.7 L'espace dévolu aux élèves*

L'animation des retours par l'enseignante est analysée de manière à observer l'espace dévolu aux élèves. L'intention est de voir si certaines situations permettent davantage de placer les élèves en position de recherche plutôt qu'en position d'attente. Dans l'affirmative, des liens seront faits avec les choix et les valeurs de variables déterminés lors de l'analyse a priori.

L'animation des retours faits par l'enseignante devrait être orientée, d'une part, par les éléments de communication écrits laissés par les élèves sur leurs copies et repérés par l'enseignante lors de son analyse des traces écrites et, d'autre part, par les interactions orales qui émergeront pendant le retour (via les questions initiées par l'enseignante ou les élèves; via les explications des élèves sur leurs propres stratégies, etc.). Les stratégies, les raisonnements, les conceptions erronées, etc. en jeu lors des retours font l'objet de l'analyse, de même que la manière dont l'enseignante anime ces éléments non anticipés en observant notamment l'espace dévolu aux élèves (position d'attente, position de dévolution).

Voyons maintenant plus finement comment s'est déroulée l'ensemble de l'expérimentation.

### 3.7 Modalités de l'expérimentation

#### *3.7.1 Les débuts de l'expérimentation*

Pour mener à bien l'expérimentation, au mois de janvier 2012, une démarche a été entreprise pour obtenir un certificat d'éthique de l'Université de Montréal. Ainsi, le 3 juillet 2012, ce certificat a été délivré par l'Université et il est depuis renouvelé annuellement. Dès ce moment, les démarches auprès du Secrétariat général de la Commission scolaire Marguerite-Bourgeoys ont commencé pour faire accepter la recherche.

Le 7 septembre 2012, une approbation (**annexe 12**) est obtenue. Le processus de recherche d'enseignants pour participer à l'expérimentation a alors débuté.

### *3.7.2 Lieu et participants à l'expérimentation*

L'expérimentation a eu lieu à l'école secondaire Des Sources[73]. Cette école est située au cœur de la municipalité de Dollard-des-Ormeaux. À l'époque, elle accueillait approximativement 1480 élèves et elle se caractérisait par une clientèle économiquement favorisée et multiethnique. Par ses différents programmes, cette école répondait à toutes les particularités de sa clientèle scolaire: les élèves en classe régulière, les élèves ouverts à la culture internationale, ceux qui recherchaient l'excellence sportive, ainsi que les élèves qui éprouvaient des difficultés d'adaptation ou avaient un handicap intellectuel et/ou physique.

La personne que nous avons choisi de solliciter, et qui a rapidement accepté de prendre part à la recherche, est une enseignante qui démontre un intérêt clair pour des questions de nature didactique. Elle remet facilement en question ses pratiques et recherche de nouvelles stratégies d'enseignement pour faire progresser ses élèves. Conséquemment, elle a montré une ouverture à expérimenter les situations afin de nourrir sa propre pratique et constituait ainsi une bonne candidate pour exploiter le potentiel de la séquence de situations. De plus, elle enseignait au premier cycle du secondaire depuis les débuts du plus récent programme de formation de l'école québécoise (donc alors depuis au moins 5 années). Cette enseignante est donc à l'aise avec les contenus de formation du premier cycle du secondaire, particulièrement ceux de la 2e secondaire, et a aussi expérimenté pendant quelques années l'approche par compétences. Conséquemment, elle comprenait bien les défis que présente cette approche et elle était ouverte au type de situations. Compte tenu du caractère exploratoire de l'étude, nous souhaitions qu'au moins un groupe de 2e secondaire (13-14 ans) d'une trentaine de sujets participent à la recherche. L'enseignante a proposé que ses deux groupes participent afin qu'ils soient en phase. Ainsi, un groupe régulier (R) et un groupe d'élèves du profil « sports-études » (SÉ) ont participé à la recherche. Pour ce deuxième groupe, l'horaire de classe est adapté de manière à condenser l'enseignement en matinée et sur une partie de l'après-midi afin de libérer plus tôt les élèves pour leurs entraînements sportifs. Signalons que ces élèves ne sont pas sélectionnés en fonction de leurs résultats scolaires. Au total, 57 sujets répartis en deux groupes font partie de l'étude et ont accepté de participer de signer le consentement de participation à la recherche (**annexe 18**). Étant donné leur âge, leurs parents ont également signé le consentement.

Les premiers contacts avec l'enseignante ont lieu au mois d'octobre 2012 lors d'une rencontre, laquelle avait pour but d'expliquer les intentions de la recherche de même que les conditions d'expérimentation. Cette dernière a accepté de participer au projet, en signant le consentement (**annexe 18**),

[73] Cet établissement a été ciblé afin d'éviter toute forme de biais possible considérant que le chercheur occupait alors les fonctions de direction adjointe dans l'école où a eu lieu la préexpérimentation, mais aussi pour voir si les situations sont exportables dans d'autres milieux, avec d'autres enseignants qui n'ont pas participé de près à l'amélioration des situations.

et en demandant toutefois de débuter le tout au mois de janvier 2013 afin de lui laisser le temps de s'approprier les modifications apportées à sa planification. L'expérimentation a débuté au mois de janvier 2013.

L'enseignante a aussi manifesté son souhait de minimiser les moments de dérangement en classe. Ainsi, elle a demandé d'envisager la possibilité que la phase de retour sur une situation soit suivie par une phase de réalisation d'une autre situation. De cette manière, seule une période de classe serait touchée pour chaque situation. Cette demande a été acceptée puisque le temps entre le retour sur une situation et la passation d'une autre n'était pas un facteur déterminant. Échéancier de passation des situations

Les situations ont été expérimentées graduellement entre les mois de janvier et mai 2013 selon les dates suivantes (tableau 8) :

*Tableau 8 - Échéancier des passations et des retours des six situations expérimentées*

| | **Phase de réalisation Groupe SÉ** | **Phase de réalisation Groupe R** | **Phase de retour Groupe SÉ** | **Phase de retour Groupe R** |
|---|---|---|---|---|
| **Situation 1** *Allumettes* | 18 janvier 2013 (1) | 18 janvier 2013 (2) | 24 janvier 2013 (1) | 24 janvier 2013 (2) |
| **Situation 2** *Magicien* | 24 janvier 2013 (1) | 24 janvier 2013 (2) | 20 février 2013 (2) | 20 février 2013 (1) |
| **Situation 3** *Enseignant* | 20 février 2013 (2) | 20 février 2013 (1) | 25 février 2013 (1) | 25 février 2013 (2) |
| **Situation 4** *Balance* | 25 février 2013 (1) | 25 février 2013 (2) | 25 mars 2013 (1) | 25 mars 2013 (2) |
| **Situation 5** *Déménagement* | 15 avril 2013 (1) | 15 avril 2013 (2) | Aucun [74] | Aucun |
| **Situation 6** *Équations* | 17 avril 2013 (1) | 17 avril 2013 (2) | 22 mai 2013 (2) | 22 mai 2013 (1) |

Notons que dans ce tableau, les nombres (1 et 2) entre parenthèses dans les phases de réalisation et de retour indiquent quel groupe a effectué en premier ou en deuxième la passation et le retour. Par le fait que le groupe SÉ commençait plus tôt la journée scolaire, il est arrivé à cinq reprises que ce groupe soit le premier à réaliser les situations.

La passation des situations s'est étalée sur plusieurs mois, pendant que l'enseignement des notions algébriques se poursuivait, de sorte que les situations proposées se sont insérées dans un contexte naturel de classe. Ainsi, la situation des *Allumettes* a été proposée après un enseignement sur les suites arithmétiques

[74] Un imprévu est survenu lors de la passation de la situation du *Déménagement*. En effet, l'enseignante a dû s'absenter à la dernière minute pour une semaine. Ainsi, la passation des situations du 15 et 17 avril ont été supervisées par un suppléant. Croyant être en mesure de gérer le retour de la situation du *Déménagement* avec le suppléant assigné pour remplacer l'enseignante (lors de la séance du 17 avril), l'expérimentation s'est poursuivie sans la présence de l'enseignante régulière. Or, avec le suppléant, les élèves ont été très dissipés, et ce, dans les deux groupes, au point où il a été jugé par le chercheur que le retour sur la situation du *Déménagement* n'était pas possible avec cet enseignant. La passation de la situation des *Équations* s'est poursuivie, mais le retour de l'enseignante régulière a été attendu pour gérer la phase de retour. Ainsi, pour l'analyse, seules les productions écrites des élèves sur la situation du *Déménagement* sont considérées et il n'y a pas d'analyse de la phase de retour.

où une stratégie canonique avait été enseignée. La planification annuelle de l'algèbre de l'enseignante s'inspirait du matériel didactique *Panoramath* dans lequel elle insérait ses propres exercices, problèmes et situations. La table de valeurs, le vocabulaire algébrique (coefficient, terme constant, etc.), la mise en équation à une inconnue, la résolution d'équations et la résolution de problèmes algébriques ont été abordés préalablement à l'expérimentation, et leur apprentissage se poursuivait pendant les mois de janvier à mars.

La mise en place de toute expérimentation invite à prendre certaines précautions méthodologiques et éthiques. La prochaine section présente des sources de biais possibles dans le cadre de la recherche. Les sources de biais possibles seront traitées en considérant trois acteurs de la recherche : les élèves qui y participent, l'enseignante qui y est impliquée, de même que le chercheur. En parallèle, les précautions méthodologiques et éthiques mises en place pour pallier les éventuelles sources de biais sont abordées.

## 3.8 Les sources de biais possibles et les précautions méthodologiques et éthiques

### *3.8.1 Les sources de biais relatives aux élèves*

Il est possible que les élèves, sachant qu'ils font partie d'une expérimentation lors de la passation des situations, s'appliquent davantage. Il est probable qu'ils deviennent ainsi de « très bons sujets ». Ainsi, peut-être auront-ils tendance à développer plus leurs idées, à organiser davantage leur production, bref, à vouloir plaire au chercheur et à l'enseignante. Cela peut avoir pour effet de questionner l'exploitabilité des résultats de la recherche dans d'autres contextes réguliers de classe du secondaire. Il faut donc être sensible aux effets potentiels de cette réalité lors de la phase d'expérimentation.

Pour pallier cette possible situation, il a été tenté, autant que possible, d'intégrer les situations à la planification normale de la classe. Les situations ont aussi un certain degré de proximité avec ce que les élèves connaissaient. Il est toutefois difficile d'avoir une intégration parfaite des situations sans éveiller les soupçons des élèves, car les séances sont filmées. La présence d'une caméra vient alors montrer aux élèves qu'ils entrent dans le cadre plus formel de la recherche.

Bien entendu, tous les sujets sont préalablement informés des buts de la recherche et des risques (ici nuls) de participer à cette dernière. Chaque participant a eu la possibilité de ne pas participer à la recherche sans pour autant être pénalisé dans la réussite de son année scolaire. Un formulaire d'information et de consentement a été remis à chaque participant, lequel qui a été signé par l'autorité parentale pour attester de l'adhésion à la recherche.

Comme chercheur, nous protégeons également la confidentialité des données recueillies. Aucune donnée à caractère nominatif n'est utilisée. Tous les sujets de la recherche sont identifiés par un numéro (sujet # 1, groupe SÉ; sujet # 2, groupe R; équipe sujets # 17-20, groupe SÉ; etc…).

### 3.8.2 *Les sources de biais relatives aux enseignants*

Dans le cadre de la recherche, deux enseignantes sont impliquées : une lors de la phase de préexpérimentation et une différente dans la phase d'expérimentation. Un protocole de passation des situations est prescrit à l'enseignante de l'expérimentation. Ce protocole explique ce qu'il est possible de dire aux élèves lors de la passation, de même que les consignes ou actions à proscrire (par exemple, dire aux élèves que dans la prochaine situation, ils doivent réaliser une stratégie canonique apprise ce qui influencerait la communication qu'ils mettent en jeu).

Le protocole décrivait, pour chaque situation : le temps à allouer à la situation; les consignes à donner avant la réalisation; les modalités de passation (individuel, en dyade, etc.); le matériel permis et les documents à remettre et dans quel ordre.

De plus, la correction des copies des élèves par le chercheur s'est faite sans les enseignantes qui participent à la recherche de manière à ce qu'aucun ne soit influencé pas les commentaires de l'autre.

Enfin, la recherche ayant eu lieu dans une école où le chercheur a aussi évolué (précédemment à la recherche) comme conseiller pédagogique, il est possible que l'enseignante approchée ait senti une pression même si aucune n'a été volontairement mise sur l'enseignante pour qu'elle participe à la recherche. Le chercheur a été le plus possible à l'écoute de ses appréhensions et ses commentaires, tout en imposant certaines limites afin d'éviter de biaiser le déroulement de la recherche.

### 3.8.3 *Les sources de biais relatives au chercheur*

Enfin, la participation de chercheur/conseiller pédagogique peut également biaiser la recherche. D'une part, l'enthousiasme face au sujet de recherche peut amener des interprétations fausses. Il faut par conséquent s'assurer de trianguler les données afin de garantir leur validité. C'est pourquoi afin de valider la correction des copies-types des sujets de la recherche et développer des catégories[75] pour coder les réponses ouvertes des élèves, un procédé de contre-codage à l'aveugle (chercheur et sa directrice de recherche) d'un échantillon de copies-types d'élèves (au moins le tiers d'un groupe) a été mis en place. Les réponses ouvertes d'élèves ont été codées en référant aux travaux sur l'analyse inductive générale de Blais et Martineau (2006).

L'analyse inductive est communément utilisée dans les recherches de nature qualitative. Les objectifs liés à l'utilisation de l'analyse inductive sont :

- « de condenser des données brutes dans un format résumé;

[75] Dans la foulée de Blais et Martineau (2006), nous adopterons la définition de Paillé et Mucchielli (2003) pour définir le concept de catégorie. On peut définir la catégorie comme une production textuelle se présentant sous forme d'une brève expression et permettant de dénommer un phénomène perceptible à travers une lecture conceptuelle d'un matériau de recherche. (…) À la différence de la « rubrique » ou du « thème », elle va au-delà de la désignation de contenu pour incarner l'attribution même de la signification (2003, pp. 147-148).

- d'établir des liens entre les objectifs de la recherche et les catégories découlant de l'analyse des données brutes;
- et de développer un cadre de référence ou un modèle à partir des nouvelles catégories émergentes » (Blais et Martineau, 2006, p. 1).

Blais et Martineau (2006) réfèrent à Thomas (2006) pour dégager six principes pour analyser efficacement des données qualitatives dans un mode inductif.

1. « L'analyse des données doit être guidée par les objectifs ou les questions de recherche, qui ciblent spécifiquement les objets devant être étudiés par le chercheur.
2. L'analyse se fait en prenant soin de lire à plusieurs reprises les données brutes et de les interpréter, ce qui en fait la composante principale de l'analyse [inductive].
3. Bien que l'analyse soit influencée par les objectifs de recherche au départ, les résultats proviennent directement de l'analyse des données brutes et non pas à partir de « réponses souhaitées » par le chercheur. Ainsi, les objectifs de recherche, tels qu'ils sont formulés, fournissent un point de vue, une perspective au chercheur pour conduire l'analyse de ses données, mais ils ne constituent pas une série « d'attentes » à produire, c'est-à-dire des résultats spécifiques à obtenir « à tout prix ».
4. L'objectif principal de l'analyse inductive est de développer des catégories à partir des données brutes pour les intégrer dans un cadre de référence ou un modèle. Ce modèle contient habituellement les catégories clés et les procédures identifiées et développées par le chercheur pendant son processus d'analyse.
5. Les résultats proviennent des multiples interprétations du chercheur qui est responsable du codage des données. Inévitablement, ces résultats sont construits à partir de la perspective et de l'expérience du chercheur qui doit prendre des décisions à propos de ce qui est plus important et moins important dans les données collectées.
6. La confiance dans les critères de rigueur des résultats (trustworthiness) peut être évaluée en utilisant des techniques similaires à celle qui sont employées avec d'autres types d'analyse qualitative (Lincoln et Guba, 1985) […] » (Blais et Martineau, 2006, pp. 5-6)

Dans le cadre de la recherche, l'analyse inductive a été utilisée pour développer des catégories sur les réponses ouvertes données par les élèves tel que mentionné précédemment. Cette approche n'a pas été utilisée, par exemple, pour analyser finement les verbatim des séances de retours de l'enseignante. L'intention n'était pas de faire une micro-analyse des retours de l'enseignante, mais bien de constater si les situations font émerger des traces de communication qui donnent une certaine prise à l'enseignante lors de ses retours et comment elle utilise les traces de communication.

Enfin, pour assurer une validité interne, des commentaires ont été consignés par le chercheur dans un journal de bord au fur et à mesure des différentes phases de la recherche. Des hypothèses qui émergeaient en cours d'expérimentation ont été écrites dans ce journal, sans en faire part à l'enseignante ou aux élèves afin d'éviter les biais. Le journal de bord a aussi été l'occasion de compiler des dates, des faits et des impressions tout au long de la recherche, permettant ainsi de juger de la cohérence de la démarche et de ses limites.

# CHAPITRE 4
# ANALYSE ET INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Le quatrième chapitre présente conjointement l'analyse des données et l'interprétation des résultats. Il comporte deux parties, soit :

1. l'analyse des conduites de communication déployées par les élèves au cours de l'activité mathématique pour chacune des situations expérimentées, et;
2. la description de l'exploitation des traces de communication laissées par les élèves qui est faite par l'enseignante lors des retours.

## 4.1 Partie 1 : L'activité mathématique et les conduites de communication déployées par les élèves dans les situations expérimentées

Dans cette première partie, nous nous intéressons à l'activité mathématique des élèves et aux conduites de communication qui ont émergé des situations. D'entrée de jeu, nous verrons que les stratégies mathématiques effectives des élèves permettent de confirmer que les situations ont donné lieu à une activité mathématique pertinente de la part des élèves.

Par la suite, l'analyse des éléments de communication produits par les élèves lors de la réalisation des situations permettra de répondre aux questions suivantes :

> ***Q1.2*** *: Comment les élèves ont-ils communiqué à propos de leurs productions mathématiques? Certaines valeurs de variables semblent-elles avoir favorisé la richesse de leur communication?*

### *4.1.1 Confirmation de l'activité mathématique des élèves*

Afin de savoir si la réalisation des situations par les élèves a donné lieu à une activité mathématique pertinente, les stratégies mathématiques des élèves ont été analysées pour chacune des situations. Cette analyse est présentée à l'**annexe 13**. Le lecteur intéressé pourra y constater que les élèves ont effectivement déployé une activité mathématique foisonnante dans l'ensemble des situations. Dans cette section nous présenterons donc seulement quelques exemples de stratégies illustrant cette activité.

Les situations du *Magicien*, de l'*Enseignant*, de la *Balance* et du *Déménagement* ont donné lieu à des stratégies mathématiques variées et distinctes d'une situation à l'autre.

- Le type de tâche sollicité par la situation de *Magicien*, qui demande de dégager un truc de magie (identité algébrique), a fait en sorte de susciter un engagement évident de la part des élèves dans une phase de recherche, certains procédant à de nombreux essais numériques, d'autres amorçant même une généralisation du truc de magie. La position d'élève-magicien, qui doit inventer un truc pour piéger ses victimes, additionnée au travail dyadique, semblent offrir des conditions qui font en sorte que les élèves redoublent d'imagination pour répondre au défi qui leur est proposé. En effet, si certains élèves réalisent les cinq étapes demandées pour piéger leur victime par une série d'additions et de soustractions ramenant au nombre choisi au départ, d'autres y vont d'étapes plus complexes où l'on doit mobiliser des multiplications et des divisions avec des grands et des petits nombres. Enfin, une équipe amorce même son truc de magie en invitant la victime, dès le début des étapes, à diviser son nombre par sa moitié. Conséquemment, l'équipe poursuit les étapes de son truc avec le chiffre 2 auquel elle applique d'autres opérations.

- Tel qu'anticipé dans l'analyse a priori, le choix de présenter les termes de la suite dans le désordre pour l'*Enseignant*, (plutôt qu'en ordre croissant comme pour les *Allumettes*), a fait en sorte que la stratégie canonique est apparue moins évidente, ce qui a conduit les élèves à une plus grande variété de stratégies personnelles. Dans la situation des *Allumettes*, la stratégie canonique était la plus utilisée, mais ce n'est pas le cas dans le problème de l'encadrement du miroir où on retrouve, par exemple, l'utilisation de quatre règles différentes, lesquelles sont parfois décrites en mots ou à l'aide d'un schéma. D'autres sujets abordent aussi le problème à partir de l'aire des miroirs.
- Dans la *Balance*, la présentation de problèmes sans données numériques, avec des dessins et peu de mots, a suscité chez les élèves le recours à une variété de stratégies dans lesquelles ils mobilisent plusieurs registres de représentations. Il semble donc que cette valeur de variable (problème sans données numériques) puisse être un levier intéressant pour travailler le passage d'un registre de représentation à l'autre.
- Enfin, l'introduction d'une solution algébrique qui omet des pas de transformation, dans la situation du *Déménagement*, demande un travail de décodage important ainsi que la mise en relations de plusieurs données. Les productions des élèves, alors en position d'enseignant implicite, donnent à voir des stratégies organisées selon la méthode enseignée « en cinq étapes ». On observe ainsi que plusieurs sujets identifient adéquatement les variables, considèrent et traduisent correctement toutes les contraintes du problème et vérifient leur réponse. Des élèves dépassent même le stade de la vérification pour entrer dans ce qui semble être une validation.

Soulignons, par ailleurs, que deux situations ont posé plus de défis aux élèves quant à l'émergence de stratégies adéquates. D'abord, la situation du *Magicien* suscite un engagement évident de la part des élèves qui font des essais numériques pour tenter de comprendre le truc de magie. Toutefois, si la manipulation des opérations en jeu dans le truc de magie ne constitue pas une difficulté pour les élèves, l'identification de l'identité en jeu, de même que la communication par écrit de leurs déductions apparaissent plus difficiles. Peu d'élèves arrivent à expliciter des éléments de généralisation du truc de magie, restant plutôt dans une phase d'action. Il appert que la mise en mots de ce qu'ils constatent constitue une réelle difficulté, du moins, dans la phase individuelle de réalisation, puisqu'en phase dyadique, des éléments de généralisation sont davantage écrits.

La situation du *Déménagement*, fait ressortir, quant à elle, plusieurs erreurs ou imprécisions mathématiques, tant dans le décodage de l'énoncé du problème que dans sa phase de résolution : variables imprécises; erreurs dans la mise en œuvre de la distributivité; oubli de contraintes dans l'équation; etc. L'analyse plus fine des éléments de communication, sous l'angle des dimensions syntaxique et sémantique, permettra une meilleure compréhension des raisonnements mathématiques.

En somme, compte tenu de la multitude de stratégies et de raisonnements répertoriés dans les productions des élèves et de leur pertinence, il apparaît clairement que les situations proposées ont donné lieu à une activité mathématique riche.

#### *4.1.2 Les éléments de communication issus des productions des élèves*

Dans cette section, on cherche à répondre aux questions suivantes :

- *comment les élèves ont-ils communiqué dans leurs productions mathématiques?*
- *certaines valeurs de variables semblent-elles avoir favorisé la richesse de leur communication ?*

Les éléments de communication des productions écrites des élèves et les enregistrements audios sont analysés pour ce faire.

Rappelons que les productions écrites des élèves sont codées à partir d'une grille d'analyse. Il en est de même pour les enregistrements sonores du travail collaboratif de dyades lors des situations du *Magicien* et du *Déménagement*. Répétons aussi que dans la grille deux critères sont codés sur une échelle de 1 à 4 : un critère lié à l'argumentation et un lié à l'organisation[76]. Ces critères sont communs à l'ensemble des six situations et permettent une comparaison d'une situation à l'autre.

Pour répondre aux précédentes questions, la comparaison de l'argumentation d'une situation à l'autre est effectuée à partir de l'analyse de plusieurs variables dont : le type d'argumentation en fonction des différentes stratégies; l'impact de l'interlocuteur de l'élève sur la qualité de l'argumentation, ce qui invite aussi à analyser les arguments avancés par les élèves dans leurs prises de position et sur les éléments de communication laissés sur les copies des élèves-fictifs; le moment didactique de réalisation d'une situation et l'impact du travail dyadique sur la richesse de l'argumentation.

Aussi, des conclusions quant à la variation de l'organisation d'une situation à l'autre sont interprétées.

[76] *L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation* et *L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée (souci du lecteur)*

#### *4.1.2.1 Variation de l'argumentation en fonction des différents types de stratégies*

L'argumentation que les élèves mettent en jeu dans les productions varie en fonction des stratégies qu'ils mobilisent. Pour interpréter ce résultat, exemplifions-le tout d'abord à partir de la situation des *Allumettes*. Cette situation vise:

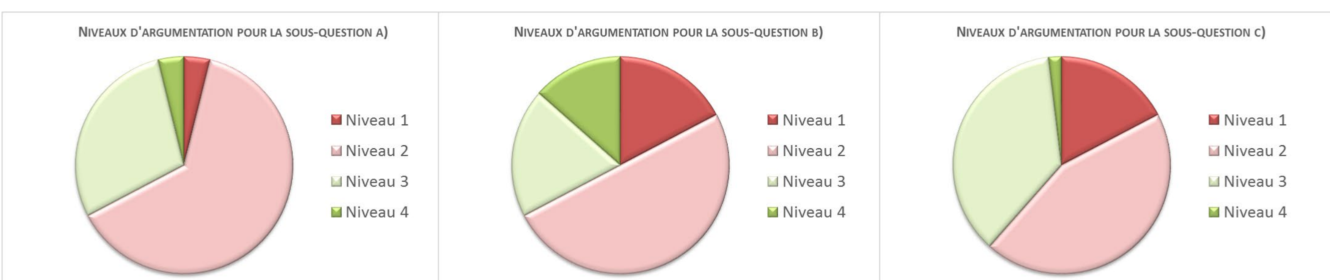
- à voir si les élèves exploitent les notions algébriques enseignées pour trouver le nombre d'allumettes constituant un rang donné;
- à noter si les élèves dégagent le terme général d'une suite;
- à voir si les élèves expliquent le raisonnement qui supporte leur stratégie.

Dans la situation des *Allumettes*, on constate que les élèves qui utilisent la stratégie canonique sont moins portés à expliciter leur stratégie que les élèves qui mobilisent une stratégie plus personnelle.

Tel qu'expliqué dans l'analyse a priori, la situation des *Allumettes* s'appuie sur une tâche où les sujets doivent résoudre, expliquer, dégager et formuler le terme général d'une suite. Le discours du raisonnement de l'élève passe principalement par l'arithmétique, appuyé par des mots-clés pour faciliter le repérage et est plus près des calculs et de la manipulation d'objets mathématiques. La situation des *Allumettes* présente trois sous-questions, partant du travail sur un cas unique vers une généralisation. Le discours de l'élève est donc différent d'une sous-question à l'autre.

La figure 12 montre en effet l'évolution du niveau d'argumentation[77] de la sous-question a) (du cas unique) à la sous-question c) (vers la généralisation). Dans ces diagrammes[78], les zones vertes représentent les plus hautes cotes pouvant être obtenues en fonction de la grille d'analyse (vert pâle : 3; vert foncé : 4) et les zones rouges, les plus basses cotes (rouge pâle : 2; rouge foncé : 1).

*Figure 12 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation des Allumettes*



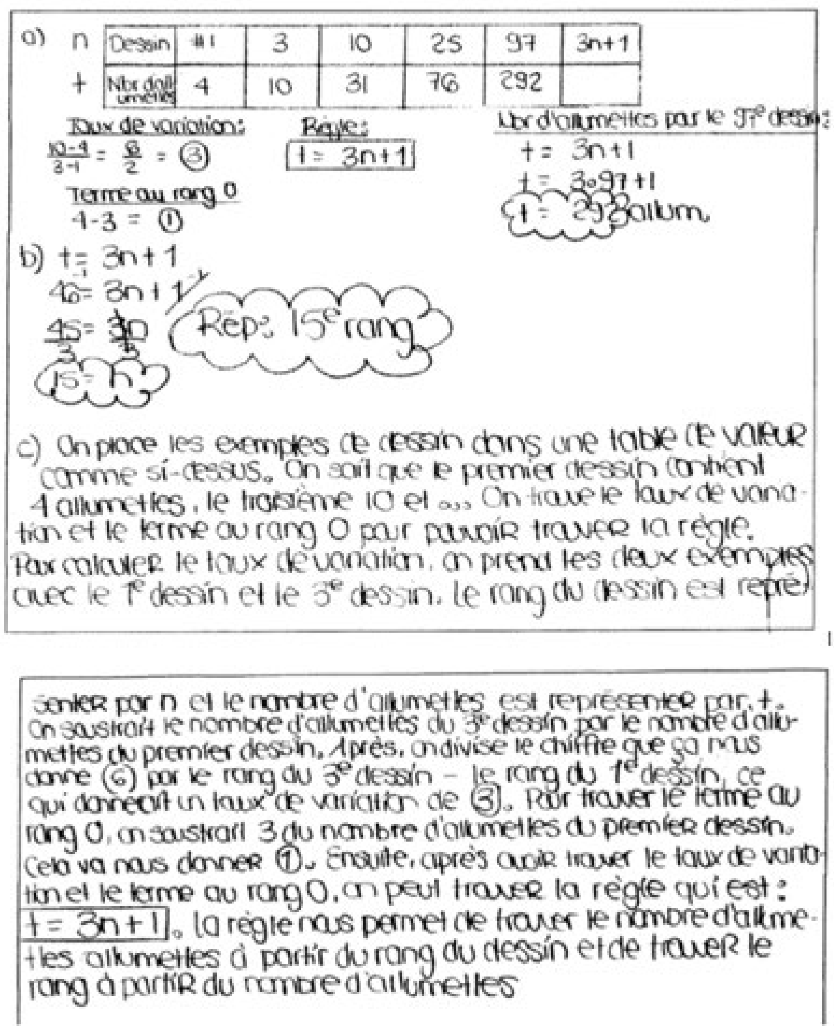

[77] Une précision est importante au regard des graphiques qui présentent les niveaux d'argumentation. Pour les niveaux 3 et 4, l'argumentation peut être fausse, c'est-à-dire fondée sur des arguments faux, mais mobilisée avec un haut discours technologique et un grand souci du lecteur. En effet, rappelons que la grille d'analyse permet, si l'élève atteint ces niveaux supérieurs (3 ou 4), de préciser si son argumentaire est vrai ou faux. C'est le deuxième critère en lien avec les stratégies adéquates, partiellement adéquates ou inadéquates qui permet de cibler la véracité des stratégies qui mènent à une réponse erronée.

[78] Dans cette section, des diagrammes circulaires seront introduits graduellement dans l'interprétation des valeurs des variables qui ont influencé l'argumentation. Le lecteur intéressé peut toutefois se référer à l'Annexe 16 qui présente l'ensemble des niveaux d'argumentation pour toutes les situations et leurs sous-questions.

La sous-question b) est une mise en application de la règle trouvée par l'élève pour déterminer le rang d'une quantité déterminée d'allumettes. L'argumentaire repose sur des opérations algébriques inverses appliquées à une équation (de la forme « *règle* = 88 »), ce qui explique la proportion plus élevée de sujets au niveau 4. Ce sont principalement ces opérations qui servent d'arguments (de pas de raisonnement) et on ne peut s'attendre à plus comme argumentaire dans cette sous-question.

Dans la sous-question c) (intimement liée à la sous-question a), l'enjeu de communication est imbriqué dans la tâche et appelle un argumentaire d'une exigence plus élevée : on doit expliquer la généralisation d'une règle ce qui force les élèves à discourir pour expliquer comment trouver le terme général de la suite. L'analyse des copies d'élèves montre parfois une forte présence d'éléments écrits qui soulèvent des doutes quant au sens accordé aux manipulations mathématiques effectuées par les élèves. À titre d'exemple, on présente la production du sujet # 3 (figure 13) du groupe SÉ.

*Figure 13 - Solution du sujet # 3 du groupe SÉ*



a)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | Dessin | #1 | 3 | 10 | 25 | 97 | 3n+1 |
| t | Nbr d'allumettes | 4 | 10 | 31 | 76 | 292 | |

Taux de variation : $\frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

Terme au rang 0 : $4-3 = 1$

Règle : $\boxed{t = 3n+1}$

Nbr d'allumettes par le 97^e^ dessin :
$t = 3n+1$
$t = 3 \cdot 97 + 1$
$t = 292$ allum.

b) $t = 3n+1$
$46 = 3n + \cancel{1}$
$\frac{45}{3} = \frac{3n}{3}$
$15 = n$

Rép : 15^e^ rang

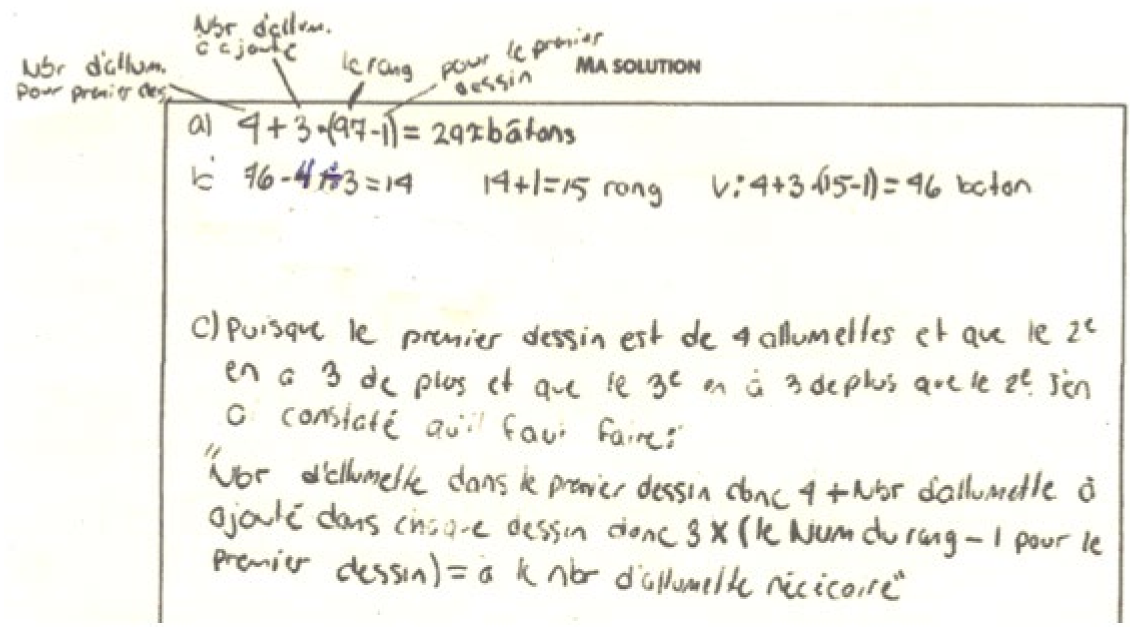
c) On place les exemples de dessin dans une table de valeur comme si-dessus. On sait que le premier dessin contient 4 allumettes, le troisième 10 et ... On trouve le taux de variation et le terme au rang 0 pour pouvoir trouver la règle. Pour calculer le taux de variation, on prend les deux exemples avec le 1^er^ dessin et le 3^e^ dessin. Le rang du dessin est représenter par n et le nombre d'allumettes est représenter par t. On soustrait le nombre d'allumettes du 3^e^ dessin par le nombre d'allumettes du premier dessin. Après, on divise le chiffre que ça nous donne (6) par le rang du 3^e^ dessin − le rang du 1^er^ dessin, ce qui donnerait un taux de variation de 3. Pour trouver le terme au rang 0, on soustrait 3 du nombre d'allumettes du premier dessin. Cela va nous donner 1. Ensuite, après avoir trouver le taux de variation et le terme au rang 0, on peut trouver la règle qui est : $\boxed{t = 3n+1}$. La règle nous permet de trouver le nombre d'allumettes les allumettes à partir du rang du dessin et de trouver le rang à partir du nombre d'allumettes

Ce sujet a été placé à un niveau élevé pour le critère d'argumentation. Pour la question c), il faut reconnaître la qualité du discours écrit du sujet # 3, tant par son éloquence, le souci du lecteur que par l'enchaînement des idées. Par contre, et c'est probablement là une limite de la grille d'analyse, il est impossible de conclure si l'élève discourt sur une technique qu'il a apprise et maîtrisée ou s'il restitue une technique. Le sujet # 3 cherche à rendre intelligible son discours pour autrui, mais on remarque qu'il décrit les objets mathématiques sur lesquels s'appuie sa technique. Il dit comment faire sans expliquer pourquoi le faire. Il s'agit d'un discours ostensif plutôt élaboré et il est difficile de conclure à un discours technologique au sens de Chevallard. Pour savoir si le sujet comprend vraiment les opérations qu'il met en jeu, il faudrait qu'il explique ce que représente le taux de variation dans le contexte de la situation (la quantité d'allumettes ajoutée à chaque dessin) et la valeur initiale. Une vulgarisation de la stratégie canonique sur laquelle le sujet # 3 s'appuie permettrait de mieux comprendre s'il saisit les raisonnements sous-jacents à la stratégie canonique. Pour que la technique acquiert un sens, une légitimité, l'élève doit être à même de s'éloigner du discours démonstratif et d'enrichir celui-ci.

En même temps toutefois, apprendre n'exclut pas comprendre et maîtriser une technique. Il est possible qu'un élève utilise une stratégie plus « technicalisée » parce qu'il en maîtrise le sens et qu'il souhaite faire une économie au niveau de son discours. C'est d'ailleurs l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques : arriver à manipuler des objets mathématiques permettant une économie d'explications, c'est-à-dire sans avoir à réexpliquer le pourquoi des manipulations des objets mathématiques. Si l'élève maîtrise bien le sens de sa technique, on s'attend à ce qu'il soit à même de l'expliquer à autrui, de la vulgariser, de concrétiser le sens des termes exploités dans sa règle. Le contexte de la présente situation ne le pousse peut-être pas à le faire.

En comparaison avec la stratégie canonique développée par une majorité d'élèves, le sujet # 8 du groupe SÉ (figure 14) développe une stratégie à partir de la règle « 4+3(n-1) ».

*Figure 14 - Solution du sujet # 8 du groupe SÉ*


Nbr d'allum. pour premier des.

Nbr d'allum. a ajouté

le rang

pour le premier dessin

MA SOLUTION

a) 4 + 3 × (97 - 1) = 292 bâtons

b) 46 - 4 ÷ 3 = 14     14 + 1 = 15 rang     V: 4 + 3 × (15 - 1) = 46 baton

c) Puisque le premier dessin est de 4 allumettes et que le 2e en a 3 de plus et que le 3e en a 3 de plus que le 2e j'en ai constaté qu'il faut faire:

"Nbr d'allumette dans le premier dessin donc 4 + Nbr d'allumette ajouté dans chaque dessin donc 3 X (le Num du rang - 1 pour le premier dessin) = à le nbr d'allumette nécessaire"

Le sujet # 8 construit et formule une stratégie personnelle pour répondre aux questions. Sa solution ne correspond pas à la stratégie canonique. Puisque ce sujet construit sa propre règle sans l'usage d'une technique connue et partagée avec son interlocuteur, on sent le souci de bien expliquer son raisonnement et de concrétiser les termes de sa formule. Puisqu'aucun langage partagé n'est encore disponible entre le sujet et l'interlocuteur, ce dernier doit davantage expliquer sa solution en tentant de convaincre de la validité de sa stratégie et nomme les objets mathématiques nouveaux de sa démarche.

Le regard sur les stratégies issues de la situation des *Allumettes*, particulièrement celles reposant sur des règles plus personnelles (non-canoniques), permet de formuler l'hypothèse que les élèves ne disposant pas d'une stratégie enseignée et institutionnalisée, expliquent davantage le sens lié aux termes mobilisés dans les règles que ceux qui utilisent une stratégie canonique. Cette hypothèse rejoint l'idée de situations de formulation. En effet, la situation de formulation peut demander que l'on formule une connaissance (ici le terme général d'une suite) pour un interlocuteur (dans ce cas-ci l'enseignante). Les élèves avec une stratégie plus personnelle semblent formuler davantage leur modèle implicite d'action.

Ce premier résultat rappelle les travaux de Goffard et Goffard (2003) présentés à la **section 2.3.2**. En évoquant des problèmes de type fermé qui orientent vers une solution spécifique, les chercheurs mentionnent que « les élèves cherchent une formule et celle-ci, ou les consignes données par le professeur, servent de « prêts à penser », orientent leur façon de réfléchir et les détournent, d'une certaine façon, d'un raisonnement de bon sens qu'ils seraient capables de mener […] » (2003, p. 182). Dans les *Allumettes*, c'est vers la stratégie canonique que se dirigent les élèves. Le problème proposé n'est pas volontairement

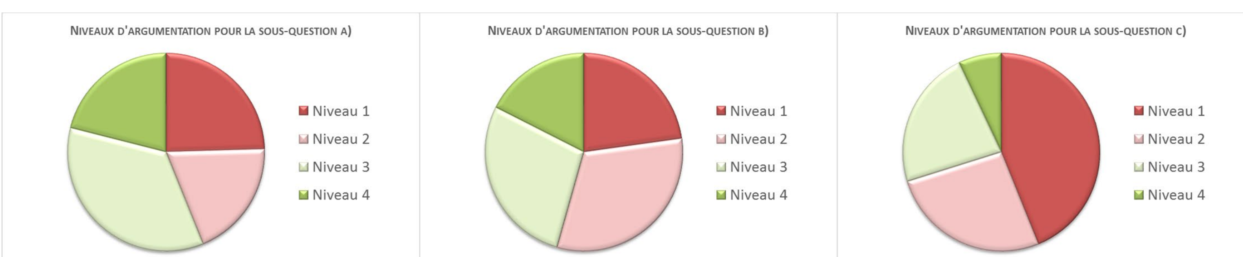
« fermé », mais il est si collé à une technique apprise que les questions et la forme de la présentation (par des dessins croissants en nombre d'allumettes) orientent vers la stratégie canonique et, en ce sens, les raisonnements des élèves sont moins accessibles que dans des problèmes offrant une plus grande ouverture de stratégies.

Nuançons toutefois cette hypothèse. En effet, le sujet # 3 dont la solution est précédemment présentée « parle » à un interlocuteur qu'il présume être son enseignante, laquelle a déjà enseigné la stratégie canonique. Convenant tous les deux de la maîtrise du langage sur lequel s'appuie la stratégie, par souci d'efficacité, le sujet # 3 montre tout ce qu'il connaît de l'enseignement reçu quelques semaines auparavant. Il répond ainsi implicitement au contrat didactique. Il comprend peut-être les étapes qu'il réalise sans toutefois sentir le besoin de les expliciter de nouveau.

*4.1.2.1.1 L'influence du choix du registre sur l'argumentation : l'exemple de la Balance*

Si la situation des *Allumettes* est connue pour les élèves, tant par les savoirs mathématiques qu'elle mobilise que par sa présentation (en mots et en dessins ordonnés), la situation de la *Balance*, elle, l'est moins. La valeur de variable quant au « choix de registre du problème » (*sans données numériques*) jumelée au type de tâche (*résoudre et expliquer l'expression d'une variable en fonction d'une autre dans un système de 3 équations à 4 inconnues*) semble mener les élèves à des niveaux d'argumentation plus élevés. En effet, la présentation, par des dessins, sans données numériques, avec des objets en équilibre n'est pas usuelle. Les questions sont aussi ouvertes (« *peux-tu comparer la masse de …* ») et aucune technique de résolution n'est enseignée. Malgré la nouveauté de la situation, la figure 18 montre un niveau d'argumentation élevé (niveaux 3 et 4) pour toutes les sous-questions (bien que les niveaux descendent de la sous-question a) vers la sous-question c) : une observation qui paraît normale compte tenu de la complexité des déductions demandées).

*Figure 15 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation de la Balance*




Tel que vu dans l'analyse a priori, cette situation est plus exigeante en termes de communication puisqu'elle force l'élève à recourir à différents registres pour expliquer son raisonnement. Plusieurs stratégies des élèves sont dénombrées (voir **annexe 13**)

Les registres « épurés » et simples de la présentation du problème dirigent les élèves vers l'adoption de registres plus personnels dans leur raisonnement pour s'aider dans la désignation des objets ou propriétés mathématiques qu'ils manipulent. Le choix de registres sur lequel l'élève appuie son raisonnement vient supporter son argumentaire, notamment puisqu'il en fait le choix (il a un niveau d'aisance dans sa maîtrise). L'ouverture sur différents registres et la liberté de choix du registre pour appuyer son argumentaire s'apparente au choix fait par certains élèves de recourir à une stratégie plus personnelle dans la situation des *Allumettes* : les sujets semblent alors mieux argumenter leur stratégie. En d'autres termes, ne pas imposer de registres de représentation à l'élève pour appuyer son raisonnement, comme le fait le problème de la *Balance*, joue probablement un rôle dans le contrôle syntaxique de l'élève. L'élève choisit le registre avec lequel il se sent le plus à l'aise pour expliciter sa stratégie.

L'analyse qui vient d'être faite autour de l'argumentation, principalement dans les situations des *Allumettes* et de la *Balance*, montre que les stratégies plus personnelles invitent l'élève à discourir davantage sur le raisonnement, à mieux argumenter et désigner les objets mathématiques. L'analyse montre également que les stratégies sont influencées par l'interlocuteur, particulièrement si l'interlocutrice est l'enseignante. La position dans laquelle l'élève est placée dans chaque situation influence l'argumentation comme le démontre la prochaine sous-section.

#### *4.1.2.2 Influence du jeu sur les interlocuteurs dans l'argumentation*

La position[79] dans laquelle est placée l'élève dans les situations, c'est-à-dire le rôle qu'on lui attribue, de même que l'interlocuteur, c'est-à-dire à qui il s'adresse ou avec qui il interagit, influencent l'argumentation déployée par les élèves. Rappelons, les valeurs des variables « position de l'élève » et « interlocuteur de l'élève » déterminées a priori pour chacune des situations. Le tableau 28 les résume :

*Tableau 9 - Synthèse des positions et interlocuteurs a priori pour chacune des situations*

| Situation | Position de l'élève | Interlocuteurs |
|---|---|---|
| *Allumettes* | Élève | Enseignante |
| *Magicien* | Élève | Enseignante, un coéquipier et un quidam |
| *Enseignant* | Enseignant explicitement | Lui-même (partie 1)<br>Deux élèves-fictifs, Amélie et Maxime (partie 2)<br>Une classe-fictive d'élèves (partie 3)<br>Son enseignante pour la prise de position (partie 4) |
| *Balance* | Élève | Enseignante |
| *Déménagement* | Enseignant implicitement | Lui-même (partie 1)<br>Renaud, un élève-fictif et un coéquipier (parties 1-2) |
| *Équations* | Enseignant implicitement | Enseignante |

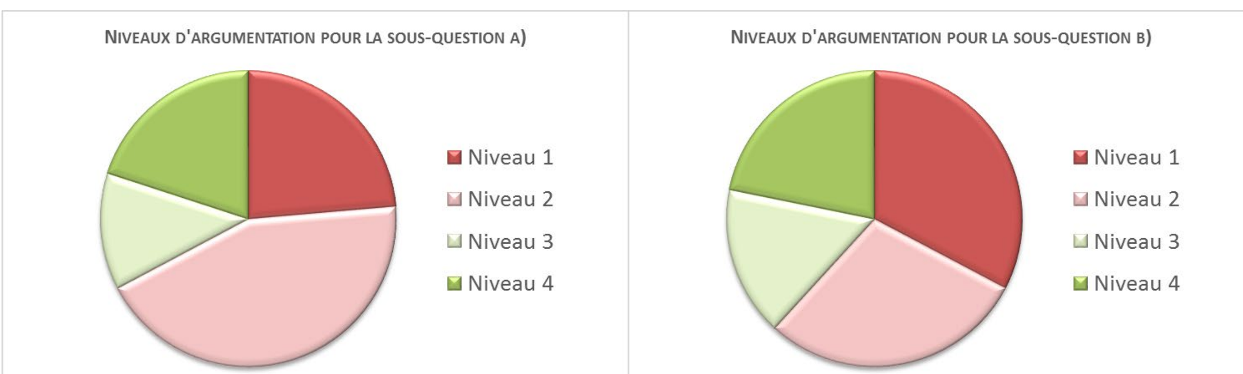
[79] Mentionnons que nous distinguerons les termes « position » et « posture ». La position attribuée à l'élève est le rôle qui lui est attribué dans la situation (élève, enseignant, co-équipier). La posture est le rôle que l'élève adopte. Si la « position » est ce qui est souhaité de la part de l'élève, la « posture » relève du rôle que l'élève s'attribue lui-même.

Dans la situation des *Allumettes*, nous avons vu que l'élève présente à l'enseignante son raisonnement écrit, celui-ci pouvant être plus ou moins explicite étant donné que l'élève sait qu'il communique avec son enseignante et présume qu'ils ont des connaissances partagées. Ces connaissances ont été institutionnalisées et inscrites dans le savoir de la classe comme une technique et ne nécessitent donc pas, du moins pour l'élève, d'être explicitées à nouveau. Le discours sur le raisonnement mis en jeu par l'élève peut être alors de type ostensif (« *voilà, je te montre ce que tu m'as appris* ») comme la stratégie canonique (« *nous savons tous les deux que cette technique fonctionne* ») sans retour aux fondements de la stratégie puisque l'élève ne ressent pas le besoin de la réexpliquer (« *pourquoi le faire, elle fonctionne?* »).

C'est pour favoriser l'émergence du discours technologique, qu'a priori, le choix de varier les positions et les interlocuteurs dans les situations a été fait. Dans les situations de l'*Enseignant*, des *Équations*, ou en dyades[80] dans les situations du *Magicien* et du *Déménagement*[81], un jeu sur les positions et les interlocuteurs a été organisé. Dans ces quatre situations, l'élève ne parle plus uniquement à son enseignante, complice des connaissances mathématiques qu'il a construites avec elle, mais il doit aussi formuler ses connaissances pour autrui (lors des dyades dans le *Magicien* et le *Déménagement*) et même décoder, commenter des productions fictives et prendre position sur celles-ci.

Ce jeu sur les interlocuteurs et les positions semble effectivement favoriser l'argumentaire des élèves dans la situation de l'*Enseignant* comme en fait foi la figure 16. Plusieurs sujets se situent aux niveaux d'argumentation 3 ou 4 dans la partie où ils construisent leur corrigé.

*Figure 16 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation de l'Enseignant lorsque l'élève fait son corrigé*




Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ces niveaux d'argumentation. D'une part, on dit explicitement aux élèves qu'ils sont enseignants et cette position les a probablement encouragés à assumer

[80] Rappelons qu'il a été vu à la **section 2.1** qu'en contexte d'interactions dyadiques, on utilise les termes « locuteur » et « allocutaire » pour signifier la présence active des protagonistes qui interagissent (Odier-Guedj, 2019).
[81] Dans cette situation, les sujets sont à la fois en posture implicite d'enseignant, mais aussi en interactions avec un coéquipier. À cet égard, ils sont en alternance locuteur et allocutaire.

la responsabilité de l'enseignant d'où un plus grand souci du détail ou de la rigueur dans la présentation de leur solution : ils sont maintenant les modèles et doivent créer un corrigé, lequel servira pour analyser les copies d'Amélie et Maxime. Ainsi, non seulement doivent-ils communiquer clairement des commentaires aux deux élèves-fictifs, mais, ils doivent aussi pour eux-mêmes organiser leurs idées, se créer un modèle, pour analyser les copies remises. L'élève-enseignant ne peut rester dans son discours écrit privé, car il doit commenter des copies. Il doit donc organiser et développer au maximum son discours, car il aura à poser un jugement sur des productions et à rétroagir auprès des élèves-fictifs, lesquels peuvent hypothétiquement questionner la correction. Devant Amélie et Maxime, l'élève-enseignant doit préparer un argumentaire étoffé. Il en va de sa « crédibilité d'enseignant ». Les élèves prennent au sérieux leur rôle d'enseignant, ils assument la responsabilité de la validité des productions sur lesquelles ils doivent se prononcer ce qui explique en partie les niveaux plus élevés d'argumentaire.

L'élève-enseignant n'a pas encore à sa disposition les copies d'Amélie et Maxime alors qu'il rédige son corrigé et se prépare à l'analyse de différentes stratégies. Il doit donc se détacher de son action pour entrer dans une phase de formulation pour lui-même des connaissances qu'il met en jeu dans sa propre résolution pour être ensuite en mesure d'analyser et nommer les connaissances qui sont mobilisés par les deux élèves-fictifs. Il entre alors davantage dans un discours technologique. Il n'a pas le choix puisqu'il analysera les connaissances et raisonnements en jeu de deux autres élèves.

Si la position d'enseignant a joué un rôle dans les niveaux d'argumentation des élèves, la présentation de l'énoncé du problème de l'*Enseignant* semble aussi influencer positivement l'argumentaire des élèves. En effet, dans le problème de l'*Enseignant*, la présentation désordonnée des dessins orientent les élèves vers d'autres stratégies que la stratégie canonique souvent repérée dans la situation des *Allumettes*. C'était d'ailleurs l'une des intentions de la situation : essayer d'éloigner les élèves de la stratégie canonique de manière à faire émerger des stratégies plus personnelles et, par conséquent, plus explicites.

Par ailleurs, les élèves-enseignants doivent aussi communiquer directement avec les élèves-fictifs en commentant, par écrit, les stratégies de ces derniers dans la situation de l'*Enseignant* et du *Déménagement*. Ces élèves-fictifs sont aussi des interlocuteurs et il est d'intérêt d'analyser les éléments écrits laissés pour mieux comprendre « comment » et « sur quoi » les élèves-enseignants communiquent avec « leurs élèves ». Les copies des élèves-fictifs sont codées selon des catégories présentées à l'**annexe 7** et à l'**annexe 8**) ce qui permet de chercher des réponses aux questions: *sur quels éléments de communication les élèves-enseignants insistent-ils ? est-ce que l'une des situations proposées suscite plus de commentaires de la part des élèves-enseignants? Dans l'affirmative, de quel type ?*

*4.1.2.2.1 Les éléments de communication laissés par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs*

Cette sous-section présente, sous forme de graphiques, les commentaires écrits émis par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs dans les situations de l'*Enseignant* et du *Déménagement*. L'analyse de ces éléments de communication vient bonifier les observations faites sur le jeu des interlocuteurs mis en place dans les six situations. Les graphiques permettront de montrer que les éléments de communication laissés par les élèves sont distincts d'une situation à l'autre et aussi fortement influencés par le type de rétroaction que les élèves reçoivent dans leur parcours scolaire.

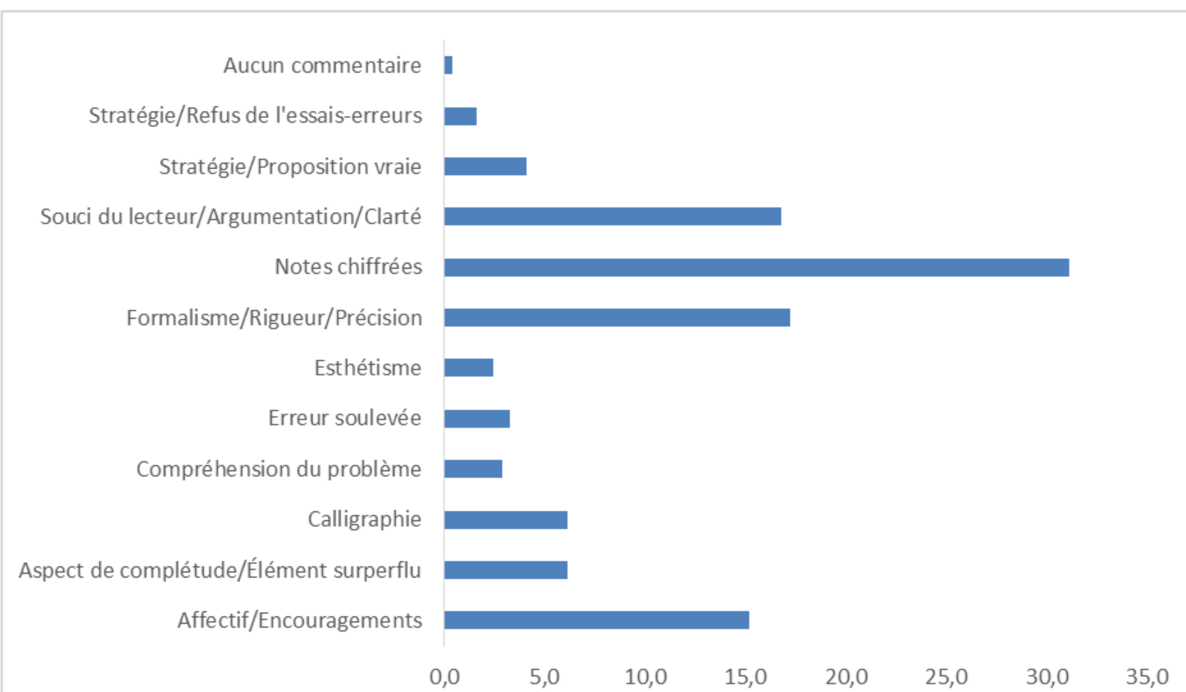
Pour analyser les éléments écrits de communication des élèves-enseignants, deux référents théoriques sont utilisés :

- Les catégories préliminaires de l'**annexe 7**;
- Les travaux de Saboya (2010) sur le contrôle sémantique et syntaxique.

*4.1.2.2.1.1 Les éléments de communication laissés par les élèves-enseignants dans l'Enseignant*

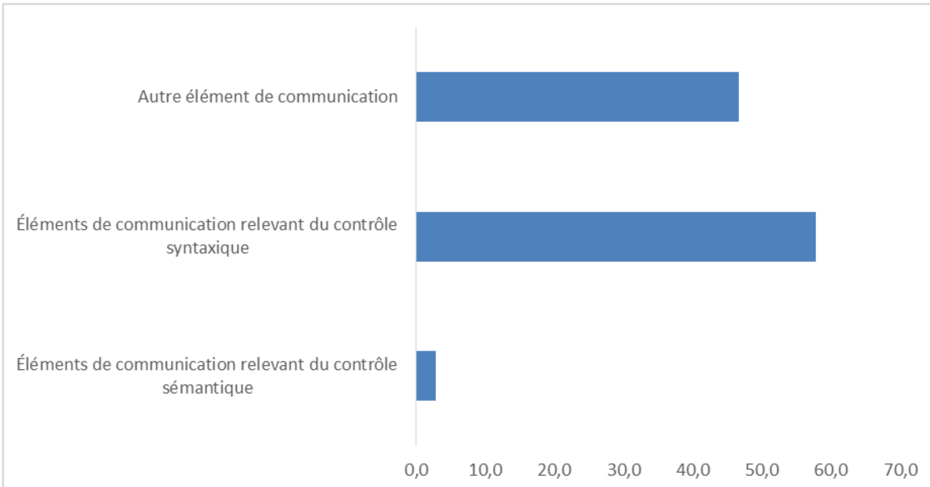
Le graphique ci-dessous (figure 17) montre la répartition en pourcentage de l'ensemble des 262 éléments de communication repérés dans la situation de l'*Enseignant*, sur les deux copies des élèves-fictifs, selon les catégories prédéterminées et expliquées à l'**annexe 7**.

*Figure 17 - Répartition en pourcentage de tous les éléments de communication laissés par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs dans la situation de l'Enseignant selon les catégories préalablement déterminées*



Un deuxième codage est effectué afin de préciser si les commentaires laissés par les élèves-enseignants ont trait à l'aspect sémantique ou syntaxique de la solution. Voici les résultats sous forme de graphique (figure 18).

*Figure 18 - Répartition en pourcentage des éléments de communication laissés par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs dans la situation de l'Enseignant selon qu'ils relèvent d'aspects sémantiques ou syntaxiques*




*4.1.2.2.1.2 Les éléments de communication laissés par les élèves-enseignants dans le Déménagement*

Pour la situation du *Déménagement*, le graphique (figure 19) montre la répartition en pourcentage des 61 éléments écrits repérés selon les catégories prédéterminées. La figure 20 montre ensuite le codage fait selon que l'élément écrit concerne le volet sémantique ou syntaxique.

*Figure 19 - Répartition en pourcentage des éléments de communication laissés par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs dans la situation du Déménagement selon les catégories préalablement déterminées*

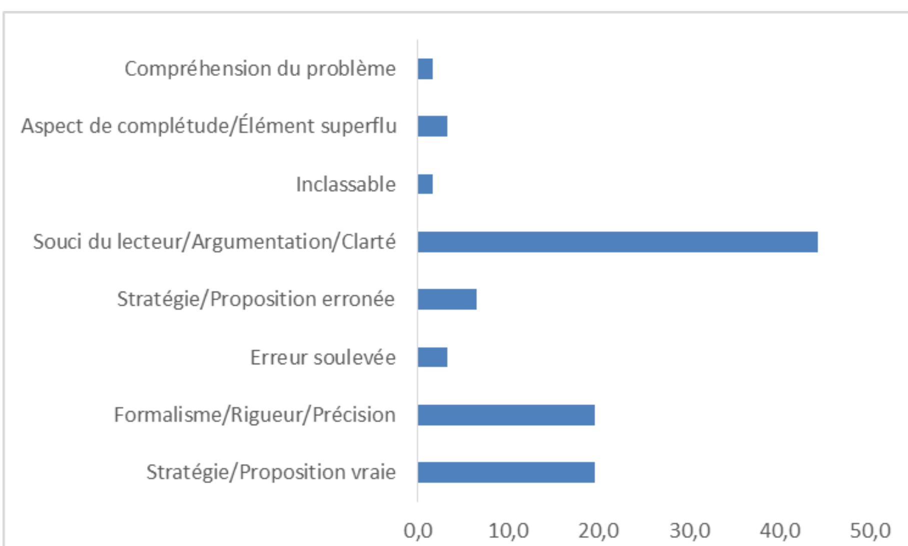
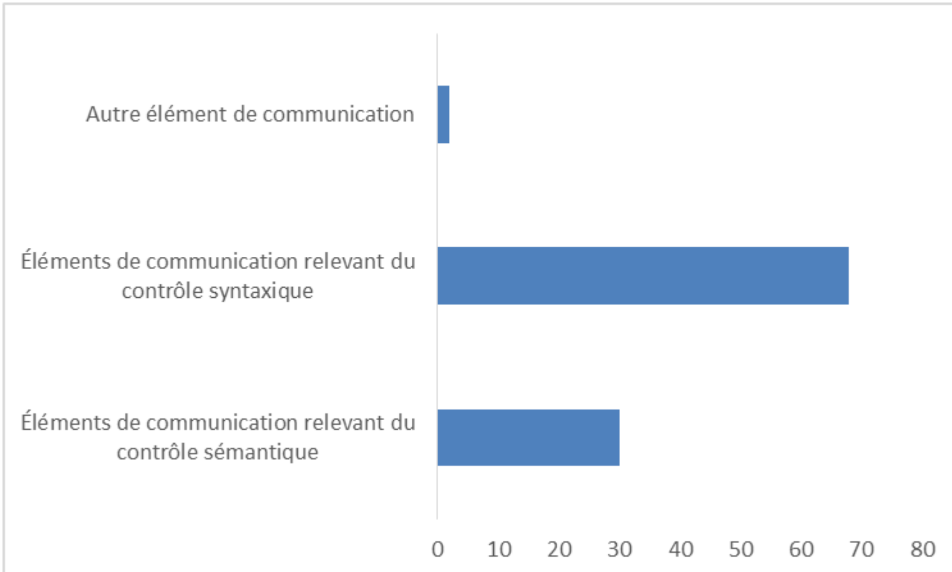


*Figure 20 - Répartition en pourcentage des éléments de communication laissés par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs dans la situation du Déménagement selon qu'ils relèvent davantage d'aspects sémantiques ou syntaxiques*




#### 4.1.2.2.1.3 *L'interprétation des graphiques précédents*

D'abord, notons la grande différence entre les occurrences d'éléments de communication écrits laissés par les élèves sur l'ensemble des productions fictives: 262 pour la situation de l'*Enseignant* et 61 pour la situation du *Déménagement*. Cela s'explique, dans un premier temps, par la présence, dans l'*Enseignant* de deux copies-types d'élèves qui montrent deux stratégies, chacune avec un nombre de registres variés et plus importants que dans la situation du *Déménagement*. Dans cette dernière situation, le registre algébrique est prédominant dans les résolutions des élèves-fictifs. Les élèves-enseignants ont donc plus de registres à décoder et commenter dans la première situation. La situation de l'*Enseignant* contient aussi un aspect comparatif entre deux stratégies (l'une plus classique, l'autre moins) qui n'est pas présent dans la situation du *Déménagement* puisqu'une seule production est présentée.

Dans la situation de l'*Enseignant*, les catégories liées à l'usage de notes chiffrées et la présence de commentaires de l'ordre de l'affectif (encouragements, « *bien* », « *B* », etc.) sont prédominants. Ce résultat paraît normal puisque les élèves reproduisent ce à quoi ils ont été habitués dans leur parcours scolaire. Les notes et les mots d'encouragement font grandement partie des pratiques enseignantes. Ce sont probablement des effets de leur vécu d'élèves qu'ils reproduisent et imitent en premier lieu. À noter que dans la situation du *Déménagement*, ces éléments ne sont pas du tout observés probablement dû à la question qui oriente les élèves-enseignant vers le repérage des manques et des imprécisions dans le raisonnement de Renaud et qu'une correction de la copie-type est déjà faite.

Les éléments de rétroaction des élèves-enseignants qui donnent une note ou indiquent un symbole relevant de l'affectif constituent des éléments de communication importants, mais ils en disent peu à celui qui reçoit les commentaires (ici les élèves-fictifs) sur son niveau de maîtrise des connaissances mathématiques en jeu dans son raisonnement ou sur ce qu'il doit faire pour améliorer sa production. Les notes ou les commentaires affectifs ne donnent pas d'informations concrètes à celui qui les reçoit sur la façon de modifier son activité mathématique. Parallèlement, elles en disent peu aussi sur ce que les élèves-enseignants décodent des productions présentées.

Il faut donc s'intéresser aux autres catégories qui regroupent les rétroactions écrites orientées vers les raisonnements et les savoirs mathématiques en jeu qui elles sont plus éloquentes. Elles donnent non seulement à l'interlocuteur élève-fictif des éléments constructifs permettant d'améliorer sa stratégie, mais elles indiquent aussi à l'enseignante des défis quant à l'usage des savoirs mathématiques sur lesquels revenir en classe lors des retours. Les éléments de communication analysés par l'enseignante peuvent aussi lui donner des leviers pour mettre en évidence des éléments positifs de communication des stratégies présentées : l'efficacité, la rigueur, les pas du raisonnement, etc.

Les autres types de commentaires paraissent plus importants à considérer au-delà des notes et de l'aspect affectif puisqu'ils se centrent plus spécifiquement sur des éléments de la communication d'ordre mathématique. La catégorie qui regroupe les commentaires liés au « *Souci du lecteur/Argumentation/Clarté* » vient après celles liées aux notes et aux aspects affectifs dans les deux situations. Les élèves-enseignants accordent de l'importance à l'argumentation et à la clarté des stratégies dans les propos qu'ils écrivent aux élèves-fictifs. En posture d'enseignant, les sujets portent une attention plus importante aux explications des raisonnements des élèves-fictifs, travaillant ainsi le décodage et l'interprétation de stratégies, mais aussi, on l'espère, prenant conscience de ces facettes à transférer dans leurs productions mathématiques personnelles.

Une autre catégorie émerge des codages soit les éléments de communication liés au formalisme, à la rigueur et à la précision (« *Formalisme/Rigueur/Précision* »). Puisque les situations sont conçues pour mobiliser des savoirs algébriques, les élèves-enseignants portent une attention au formalisme en jeu dans les résolutions, à la rigueur et à la précision des raisonnements probablement parce que ces éléments sont travaillés en classe. D'ailleurs, en complémentarité avec cette catégorie, certains sujets-enseignants ont, pour la situation de l'*Enseignant*, refuser la stratégie d'Amélie pour la sous-question b) construite sur une série d'essais. Des sujets disent qu'une telle stratégie n'est pas mathématique. Les quelques commentaires repérés à cet effet sont regroupés sous la catégorie « *Stratégie/Refus des essais-erreurs* ».

La stratégie d'Amélie à la sous-question b) n'est toutefois réalisée au hasard. Elle semble mettre en place un processus de régulation puisqu'elle émet des hypothèses sur le nombre de carreaux qui forment le côté et teste ensuite ce nombre dans sa stratégie (à savoir la différence des aires). Les essais semblent contrôlés. On peut se questionner sur le rejet par des sujets de la stratégie plus « heuristique » d'Amélie qualifiée de « non-mathématique » par certains. L'hypothèse avancée pour expliquer ce rejet des « essais-erreur » est que cette démarche serait considérée comme de moins bonne qualité qu'une démarche plus rigoureuse de type algébrique, d'autant plus que les élèves-enseignants sont en apprentissage de l'algèbre, sans compter qu'ils ont aussi la démarche de Maxime comme exemple laquelle s'approche davantage d'une démarche algébrique connue.

Vlassis et al. (2014) notent que « les heuristiques (dessin ou tâtonnement) sont les démarches les moins plébiscitées par les enseignants tous niveaux confondus. Le tâtonnement, en particulier, est l'heuristique la moins appréciée. » (p. 168). Les observations de ces chercheurs viennent donc appuyer l'hypothèse du rejet de cette stratégie d'Amélie par des effets du contrat didactique puisque l'enseignement reçu des élèves est peu orienté vers cette démarche heuristique. Il sera intéressant de noter comment la stratégie d'Amélie à la sous-question b) est traitée par l'enseignante dans la phase de retour.

Par ailleurs, même si les élèves-enseignants sont en position d'analyse des stratégies de Maxime et d'Amélie dans l'*Enseignant* (disons en mode « sémantique »), comme on peut le voir dans la figure 21, ils laissent des traces de communication dans une forte proportion sur la dimension syntaxique des stratégies des élèves. Ce constat pouvant s'expliquer par le fait que les deux élèves-fictifs arrivent à une bonne réponse, mais par des chemins différents. Les élèves-enseignants peuvent donc présumer qu'Amélie et Maxime ont correctement décodé les éléments du problème, ils analysent alors plus finement les éléments de communication de leur raisonnement.

Dans le *Déménagement*, comparativement à l'*Enseignant*, les élèves-enseignants laissent plus d'éléments de communication à Renaud en lien avec des aspects sémantiques. Notamment, plusieurs commentaires sont repérés sur la définition imprécise des variables du problème, sur les relations entre les variables et sur la mise en équation. Il n'est pas surprenant de faire un tel constat puisque dans le *Déménagement*, les élèves-enseignants analysent un problème algébrique classique qui met en jeu plusieurs relations et qu'ils savent que Renaud a été imprécis dans sa stratégie puisque cela leur a été explicitement écrit dans la question. Ils cherchent à savoir pourquoi, ce qui les ramènent à un décodage sémantique avant de porter un regard sur le contrôle syntaxique de Renaud.

D'ailleurs, une catégorie est précisée lors du codage, soit celle où l'élève propose un ajout à Renaud dans sa stratégie (« *Stratégie/Proposition vraie ou erronées* »). Certains sujets proposaient de modifier les variables de manière incorrecte, notamment en inscrivant une quantité de boîtes égale à « -3x ». Ainsi, la catégorie est améliorée de manière à voir si la proposition faite par les « enseignants » est « vraie » ou

« erronée ». Les élèves-enseignants qui font une proposition erronée présentent eux-mêmes des difficultés avec le leur contrôle sémantique.

Résumons les idées de la présente section qui cherche à voir comment les élèves-enseignants communiquent par écrit avec leurs élèves, plus précisément sur quoi ils insistent dans leurs traces écrites. Tout d'abord, les élèves reproduisent principalement des modèles de communication auxquels ils ont été confrontés dans leur parcours scolaire : indiquer des symboles de « *B* » pour signifier qu'une réponse ou stratégie est bonne; mettre des notes ou retirer des points; faire certains commentaires sur la qualité de la présentation (attention à ton écriture); etc. Les élèves-enseignants vont aussi plus loin dans leur analyse des copies des élèves-fictifs et donnent une rétroaction en lien avec les raisonnements et les savoirs mathématiques. Ils discourent dans une proportion assez importante sur des aspects liés à l'argumentation, à la clarté, au formalisme et à la rigueur des raisonnements. Demander aux élèves d'analyser la production d'un autre élève paraît donc prometteur pour développer le contrôle sémantique. Non seulement doivent-ils décoder un problème pour eux-mêmes, mais ensuite ils doivent comprendre ce qu'un autre élève a fait en analysant sa production. Le développement du contrôle sémantique est d'autant plus important lorsque les élèves doivent analyser un problème algébrique écrit, comme dans la situation du *Déménagement,* puisqu'une multitude d'éléments de communication, vrais ou erronés, émergent des commentaires des élèves-enseignants. Ces éléments donnent une prise à l'enseignante pour organiser son retour sur la situation.

De plus, le fait de placer les élèves devant des stratégies différentes et de les amener à les commenter force un regard de validation, non seulement sur les stratégies montrées, mais aussi sur leur propre stratégie d'élève-enseignant.

#### *4.1.2.2.2 Les types d'arguments avancés par les élèves dans leur prise position*

Les situations de l'*Enseignant* et des *Équations* sont plus exigeantes au regard de l'activité de communication demandée aux élèves-enseignants puisque ces derniers doivent prendre position en avançant des arguments sur la réalisation de quatre élèves (deux dans chaque situation).

Pour la prise de position dans les *Équations*, l'interlocuteur change : l'élève-enseignant ne parle plus directement aux élèves, mais bien à son enseignante. Ce changement d'interlocuteur amène les élèves-enseignants vers une argumentation plus soutenue puisqu'ils doivent emporter la conviction de l'enseignante, elle-même détentrice du savoir mathématique. Les élèves-enseignants doivent être bien outillés pour la convaincre. Dans la présente sous-section, une analyse des arguments avancés dans la prise de position est réalisée.

*4.1.2.2.2.1 Les arguments avancés dans la situation de l'Enseignant*

À la question « *Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.* », 48 sujets (sur 55) fournissent une réponse écrite. Ces réponses écrites varient toutefois allant de la simple affirmation (« *la stratégie d'Amélie est meilleure* ») à une prise de position plus soutenue (« *la stratégie d'Amélie est meilleure parce que…* »).

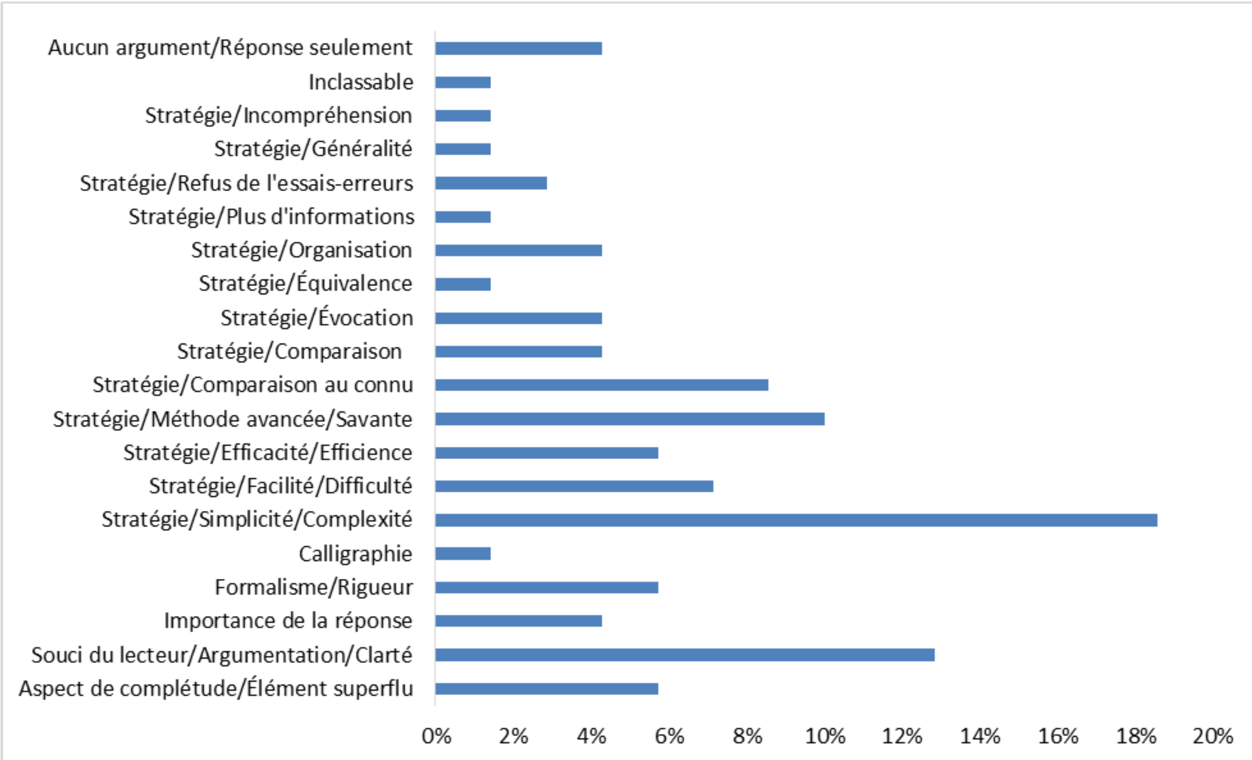
Le tableau 10 présente la stratégie que les élèves préfèrent. On note toutefois 14 sujets qui n'ont pas explicitement pris position pour l'un ou l'autre, mais ont nuancé leur prise de position.

*Tableau 10 - Répartition des prises de position des élèves sur la meilleure stratégie entre celle de Maxime ou d'Amélie dans la situation de l'Enseignant*

| | **Maxime** | **Amélie** | **Réponse nuancée** | **Aucune réponse** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|
| *Occurrence* | 24 | 10 | 14 | 7 | **55** |

Selon les catégories créées précédemment, le graphique de la figure 21 montre les types d'arguments utilisés par les sujets dans leur prise de position. Notons qu'un sujet peut avoir donné plusieurs arguments pour justifier son choix : les arguments sont alors classés dans des catégories distinctes. Ces arguments peuvent aussi être liés tant à un aspect positif (« *la stratégie est plus efficace* ») que négatif (« *la démarche est trop longue* »). L'intention de ce graphique étant d'avoir un vue d'ensemble sur ce à quoi les élèves accordent de l'importance dans leur prise de position et ce, en amalgamant les arguments en faveur de Maxime, d'Amélie ou les prises de position plus nuancées.

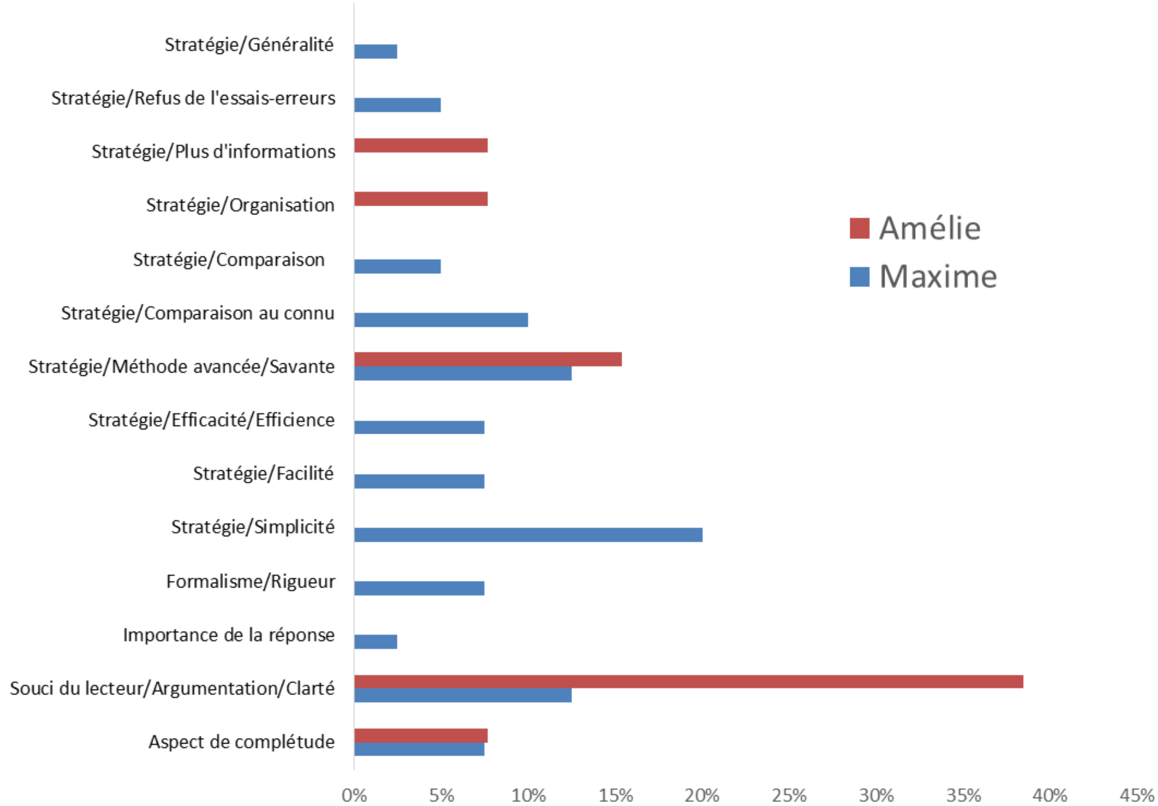
*Figure 21 - Catégories générales des arguments avancés à propos des productions de Maxime et Amélie*




À partir de ce schéma, on remarque que les sujets accordent beaucoup d'importance à la simplicité (ou à la complexité) de la stratégie qu'ils analysent. Vient ensuite la catégorie liée à l'argumentation (englobant aussi le souci du lecteur et la clarté de la production) en jeu dans la stratégie. Les catégories « *Stratégie/Comparaison au connu* » et « *Stratégie/Méthode avancée/Savante* » se retrouvent ensuite dans des proportions similaires.

La figure 22 qui suit compare plus finement les types d'arguments avancés par les sujets pour prendre position en faveur de Maxime (bleu) ou d'Amélie (rouge).

*Figure 22 - Types d'arguments avancés par les élèves pour prendre position en faveur d'Amélie ou de Pascal*




Mentionnons tout d'abord que, bien que le graphique de la figure 22 présente des données en pourcentages, les effectifs[82] restent petits. Pour la stratégie de Maxime, 40 arguments sont classifiés alors que 15 le sont pour la stratégie d'Amélie. Cela explique en partie la plus grande variété des arguments en faveur de Maxime, d'autant plus que plus d'élèves apprécient sa stratégie davantage. Il ressort de la figure 22 que les élèves qui prennent position en faveur de Maxime le font principalement pour des raisons liées à la simplicité de la stratégie. Aussi, des arguments liés à sa méthode dite « plus avancée » et considérée plus éloignée de la méthode d'essais-erreurs[83] repérée sont constatés. Sa stratégie est également plus près du langage algébrique avec lequel les élèves travaillent en classe. Cela explique probablement la présence d'arguments dans les catégories « *Stratégie/comparaison au connu* » et la catégorie liée au « *Formalisme/rigueur* » intimement reliés à l'algèbre.

Quant aux arguments avancés pour prendre position en faveur de la stratégie d'Amélie, ils sont liés à son argumentaire et à sa clarté. On voit aussi que des élèves qui adhèrent à sa stratégie le font puisqu'ils jugent sa stratégie « plus avancés ou savante ». Toutefois, bien qu'étant dans la même catégorie, les

[82] C'est-à-dire les occurrences d'arguments en faveur de l'un ou l'autre des élèves-fictifs.
[83] Dans le raisonnement de la sous-question b) de la stratégie d'Amélie.

arguments avancés sont différents de ceux qui ont pris position pour Maxime pour les mêmes raisons. Si, pour Maxime, on voyait un rejet de l'essai-erreur, ici, pour Amélie, on constate que les élèves la choisissent puisqu'elle leur semble plus savante. « *Je trouve que la stratégie à Amélie est meilleure, mais beaucoup plus compliquée à comprendre et à réaliser que celle de Maxime* », propos du sujet # 22 du groupe SÉ. Tel qu'anticipé lors de l'analyse a priori, ce type d'argument peut rappeler les travaux de Healy et Hoyles (2000) quant au fait que certains élèves voient dans une solution plus complexe une meilleure solution simplement parce qu'ils ont de la difficulté à la suivre.

Notons finalement que des arguments liés à « l'importance de la réponse » sont, dans cette situation, peu présents. Cela peut s'expliquer par le fait que les deux élèves-fictifs arrivent à des réponses exactes par des chemins différents. La place de cette catégorie est très différente dans la situation des *Équations* où certaines réponses sont fausses et où les démarches rappellent des procédés connus des élèves.

*4.1.2.2.2.2 Les arguments avancés dans la situation des Équations*

Le tableau 11 synthétise les prises de position des élèves pour chacune des équations, à savoir s'ils préfèrent la stratégie de Mylène ou de Pascal, s'ils nuancent leur prise de position (explicitement nommée et argumentée) ou s'ils ne laissent aucune réponse.

*Tableau 11 - Répartition des prises de position pour l'ensemble des trois équations proposées dans la situation des Équations*

| **Équations** | **Mylène** | **Pascal** | **Réponse nuancée** | **Aucune réponse** | **Totaux** |
|---|---|---|---|---|---|
| *Équation # 1* | 49 | 5 | 1 | 2 | **57** |
| *Équation # 2* | 20 | 31 | 4 | 2 | **57** |
| *Équation # 3* | 43 | 8 | 3 | 3 | **57** |

Les prises de position des élèves-enseignants se font pour les trois équations sur des phases d'action d'élèves-fictifs, voire sur des calculs, des enchaînements d'équations réduites, sur le maintien de l'égalité et sur le symbolisme en usage dans la résolution d'équations (les flèches pour indiquer la distributivité; les termes retirés ou ajoutés de chaque côté d'une équation; etc.).

**Analyse plus spécifique de la communication dans la première équation**

Pour mieux comprendre les types d'arguments invoqués par les élèves-enseignants dans leur prise de position, rappelons les réalisations des deux élèves (figure 23) à la première équation.

*Figure 23 - Solutions de Mylène et Pascal à la première équation*

**Équation 1 :** 3x + 5 = 9x - 17

| **Solution de Mylène** | **Solution de Pascal** |
| --- | --- |
| $3x + 5 = 9x - 17$ | $3x + 5 = 9x - 17$ |
| $-3x \qquad -3x$ | $5 - 6x = -17$ |
| $5 = 6x - 17$ | $22 - 6x = 0$ |
| $+17 \qquad +17$ | $x = \frac{6}{22}$ |
| $\frac{22}{6} = \frac{6x}{6}$ | |
| $3{,}6 = x$ | |

La prise de position des élèves pour cette 1re équation est fortement dirigée vers la solution de Mylène tel qu'anticipé dans l'analyse a priori. Cette dernière a la bonne réponse et réalise une démarche plus classique, ou plus pratique, que celle de Pascal (en ramenant les variables à droite et les constantes à gauche, de manière à conserver des coefficients positifs). Pascal est en bonne voie de réussir sa résolution, mais il fait une erreur de division à la toute fin en plus de laisser moins de traces de raisonnement que Mylène. Cinq élèves ont quand même pris position pour lui.

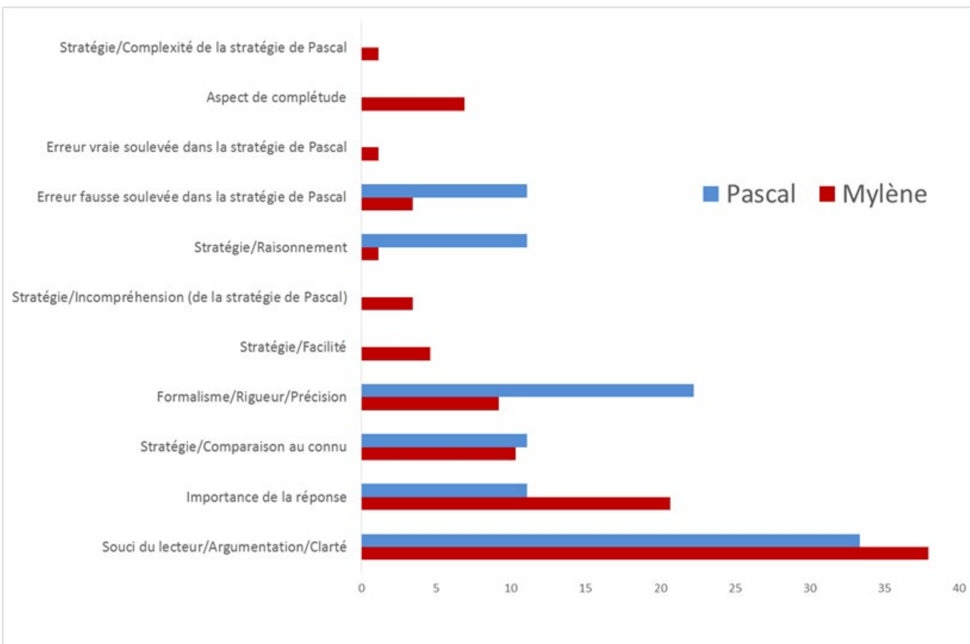
Comme indiqué dans le **tableau 35**, 32 sujets prennent position pour Mylène en faisant une résolution personnelle avant de commenter et 13 sujets prennent aussi position pour elle, mais seulement à partir d'arguments (sans faire de réalisation personnelle). La grande majorité des élèves (33 sujets) résolvent l'équation en ramenant les variables à droite, ce qui n'est pas la manière usuelle avec laquelle une résolution d'équation est enseignée (souvent, on laisse les variables à gauche de l'équation). Mais dans ce cas-ci, travailler avec les variables à droite évite d'obtenir des coefficients négatifs : 7 sujets seulement résolvent en ramenant les variables à gauche.

Si la plupart des élèves indiquent clairement toutes les étapes de leur raisonnement, certains omettent des étapes de résolution. Par exemple, deux sujets ont écrit « -3 » au lieu de « -3x » dans les étapes de résolution laissant présager un travail à faire par l'enseignante sur le sens du terme « -3x » accordé par ces élèves. Peut-être s'agit-il d'un implicite (un raccourci) dans la présentation des étapes de résolution, résumé par l'usage du « -3 », voulant référer au retrait du terme « 3x ».

La grande variété de représentations numériques avec lesquelles la réponse est présentée est intéressante. Plusieurs sujets (35 sujets) la laissent en nombre décimal (3,66), trois sujets sous forme de fraction (22/6, -22/-6 ou 11/3) et un sujet sous forme de nombre fractionnaire (3 et 2/3). Des sujets représentent aussi leur réponse sous plus d'une forme. La prédominance de la réponse laissée en nombre décimal laisse croire que des élèves peuvent être embarrassés par des réponses fractionnaires. D'ailleurs, dans sa prise de position, le sujet # 20 du groupe R le mentionne explicitement : « *Pour moi, les réponses en 6/22, 1/2, 4/6, etc. je trouve ça compliqué* ». D'autres sujets (six sont dénombrés) critiquent la précision de la représentation décimale de Mylène en mentionnant qu'elle doit indiquer le symbole du périodique au-dessus du 6 ou arrondir à 3,7.

Les 49 sujets qui ont pris position pour Mylène fondent leur décision sur 87 types d'arguments alors que les cinq sujets qui ont pris position pour Pascal le font à partir de neufs types d'arguments. La figure 24 montre la répartition en pourcentages des arguments avancés pour chacun des élèves-fictifs. Les arguments en faveur de Pascal étant peu nombreux, il faut les interpréter avec prudence.

*Figure 24 - Répartition des pourcentages des types d'arguments avancés par les élèves-enseignants pour prendre position sur les productions de Mylène et Pascal dans la première équation*




On note tout d'abord une plus grande variété d'arguments avancés en faveur de Mylène principalement due à un effectif plus grand de sujets l'ayant choisie. La catégorie du « *Souci du lecteur/Argumentation/Clarté* » est celle avec la plus grande proportion pour les arguments dans la prise de position pour Mylène. Ensuite, l'importance de la réponse (juste) vient introduire une nouvelle catégorie qui n'est pas présente dans la situation de l'*Enseignant*. Les élèves repèrent que Mylène arrive à la bonne réponse comparativement à Pascal. Cette catégorie ne surprend pas compte tenu des erreurs volontairement présentées dans la résolution de Pascal.

On note aussi que 31 sujets établissent une comparaison entre les deux stratégies pour justifier leur prise de position (et même parfois rejetés la stratégie de Pascal en manifestant leur incompréhension quant à son raisonnement ou même en trouvant sa stratégie trop complexe). De ces sujets, deux formulent une prise de position en s'adressant directement aux élèves-fictifs (à la 2e personne du singulier). Les 29 autres s'adressant directement à leur enseignante.

Pour exemplifier un cas où un élève-enseignant communique sa position en considérant son enseignante comme interlocutrice, le sujet # 9 du groupe SÉ prend position pour Mylène en argumentant : « *Pascal ne dit pas le calcul qu'il fait. Pascal aurait dû enlever -5 à gauche à la place du -17. La réponse est incorrecte: il s'est trompé. Mylène a fait les bons échanges, avec la bonne méthode. Elle a aussi eu la bonne réponse* ». Le sujet # 9 met en évidence la clarté de la démarche des élèves-fictifs, l'importance de la bonne réponse, la stratégie des « échanges » et fait une suggestion de retirer le « -5 » à droite au lieu d'ajouter (implicitement) le « -17 » à gauche. Le sujet # 9 appuie sa prise de position sur une explication des raisonnements en jeu dans les deux stratégies et ce, en considérant son enseignante comme interlocutrice.

Le sujet # 2 du groupe R quant à lui prend position pour Mylène en établissant une comparaison avec la production de Pascal qui repose sur la clarté des démarches. Il s'adresse directement à Pascal: « *Mon cher Pascal, je crois bien qu'il y a des démarches que tu as faites que tu n'as pas écrites. La prochaine fois, écris toutes tes démarches. <u>Mylène, en écrivant toutes ses démarches, ne perd pas son idée »</u>.*

Deux éléments retiennent l'attention dans cette dernière prise de position :

1- D'une part, il semble y avoir une prise de conscience de l'élève-enseignant de l'importance de laisser des démarches pour *ne pas perdre son idée*. Cet élément de la communication qui vise à rendre explicite par écrit une démarche est implicitement décrite par le sujet # 2 comme une façon de garder un contrôle sur son propre raisonnement. Repérant que Mylène est plus explicite dans ses démarches, on espère que le sujet # 2 transfère lui-aussi cette communication plus explicite dans ses propres productions.

2- D'autre part, on constate que l'élève-enseignant (sujet # 2) s'adresse directement à l'élève (ici Pascal) et adopte une posture d'enseignant, montrant un engagement de sa part dans ce rôle. La comparaison qu'il fait laisse à penser qu'il a pris soin de bien décoder les deux productions des élèves-fictifs avant de prendre position.

Le sujet # 17 du groupe R s'adresse aussi à un élève-fictif, mais cette fois-ci en interpellant à la fois Mylène et son enseignante[84]: « *Mylène, on ne comprend pas bien ton raisonnement. Tes démarches ne sont pas claires. Ta réponse n'est pas bonne, car c'est 3,666 (périodique). Pascal, ta démarche n'est pas claire.*

[84] Le passage souligné s'adresse à l'enseignante.

*Heureusement, tu as eu la bonne réponse. Pascal a des démarches plus claires que Mylène et il a laissé sa réponse en fraction (car s'il ne l'avait pas laissé, il aurait à faire 3,666 (périodique))* ». Le sujet # 17 décode à tort chez Pascal une bonne réponse et, contrairement à la plupart des autres élèves, il voit dans sa solution une démarche plus claire.

**Analyse plus spécifique de la communication dans la deuxième équation**

Notons que la prise de position est moins polarisée vers l'un des deux élèves-fictifs dans la deuxième équation (figure 25). Les choix des stratégies de Mylène et Pascal (20 contre 31) laisse penser que la véracité de la réponse de Pascal a pris le dessus sur la démarche de résolution plus classique de Mylène.

*Figure 25 - Solutions de Mylène et Pascal à la deuxième équation*

**Équation 2 :** $15 \cdot (12 - x) = 150$

**Solution de Mylène**

$$15 \cdot (12 - x) = 150$$
$$180 - x = 150$$
$$-180 \qquad -180$$
$$-x = 30$$
$$x = -30$$

**Solution de Pascal**

$$15 \cdot (12 - x) = 150$$
Donc, $12 - x = 10$
$$x = 2$$

Dans cette deuxième équation, Mylène, toujours avec une démarche plus classique, arrive toutefois à une réponse erronée (oubli de la distributivité du 15). Pascal, quant à lui, laisse peu de démarche de résolution à l'aide de symboles ou de mots puisqu'il déduit dès le départ que la valeur de la parenthèse doit être de 10. Son « *donc* » constitue en fait l'essentiel de sa démarche de communication. Il ne laisse également pas d'indication du retrait du 12 de chaque côté de l'équation intermédiaire « 12 – x = 10 » puisqu'il déduit que la valeur du « x » est 2 dans une équation très simple qui est travaillée depuis longtemps avec les élèves dans un contexte arithmétique, voire moins symbolisé de manière formelle avec des variables (« douze moins quoi donne 10 »).

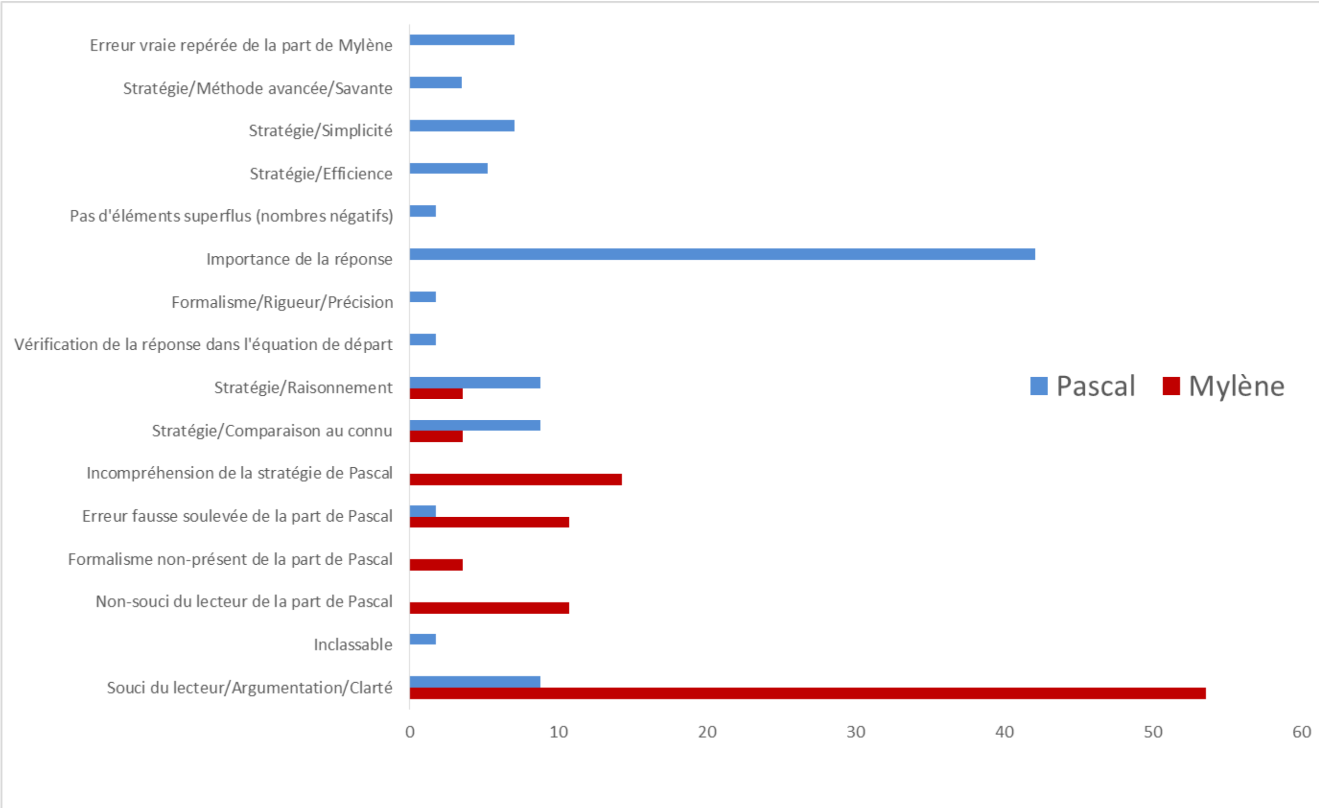
La stratégie personnelle des sujets qui revient le plus souvent est celle où l'élève développe l'équation en distribuant le 15 et en laissant toutes les traces de sa résolution (28 sujets ont fait cela), sans faire d'erreur (voir à cet effet le **tableau 36**). Aucun élève n'a procédé de la même façon que Pascal en ne développant pas l'équation, en tirant une conclusion de l'observation générale de l'équation et en mentionnant que la parenthèse donnait 10. A posteriori, il n'est sans doute pas étonnant que la plupart des élèves développent algébriquement leur équation. Ils sont encouragés à le faire dès le début de l'apprentissage de la résolution d'équations et, étant encore à leurs premiers pas, le développement algébrique vient en sécuriser plusieurs. Aussi, ils reproduisent probablement le modèle de résolution appris sachant que leur interlocutrice est leur enseignante régulière.

On peut aussi penser que les sujets sont peu habitués à calculer une réponse mentalement, sans recourir à un algorithme. Par exemple, devant l'opération arithmétique 12 x 13, l'élève est peu entraîné à trouver une façon de réaliser efficacement cette opération mentalement[85] et recourt à l'algorithme classique de multiplication en colonne. Tout comme en arithmétique, il semble que ce soit une habitude semblable qui se poursuive ici au niveau algébrique. Ce recours rapide aux algorithmes de résolution, même dans le contexte algébrique, ramène aux travaux de Saboya (2010) sur le contrôle syntaxique des élèves en résolution de problèmes. En effet, les sujets semblent avoir de la difficulté à anticiper les conditions de validité des résultats des équations qui leur sont présentées. Ils se lancent dans la résolution sans remettre nécessairement en question les réponses qu'ils obtiennent. Devant des équations simples, on doit encourager l'élève à estimer l'ordre de grandeur de la valeur de la variable, un peu comme Pascal le fait dans sa résolution. Contrairement aux problèmes mathématiques qui contiennent un contexte, un référant plus concret pour l'élève, les équations sans contexte encouragent moins les élèves à poser un second regard sur leur résolution, par exemple en remplaçant la valeur trouvée dans l'équation de départ (faire une vérification).

Les 20 sujets qui prennent position pour Mylène fondent leur décision sur 28 types d'arguments alors que les 31 sujets qui prennent position pour Pascal le font à partir de 57 types d'arguments. La figure 26 montre la répartition en pourcentages des arguments avancés pour prendre position pour chacun des élèves-fictifs. On remarque que les arguments de la plupart des sujets qui prennent position pour Mylène ont trait à son souci du lecteur et à sa clarté. En effet, Mylène, bien que faisant une erreur de distributivité, montre toutes les démarches de résolution. La deuxième catégorie pour la prise de position en faveur de Mylène est l'incompréhension de la part de la stratégie de Pascal, suivie de près par des arguments liés à sa non-considération de son interlocuteur. Ainsi, les sujets semblent avoir choisi la stratégie de Mylène non pas pour la véracité de sa réponse, mais bien pour la qualité de sa démarche qui montre plus explicitement les étapes de son raisonnement. Le sujet # 6 du groupe SÉ l'écrit explicitement: « *Même si elle n'a pas eu la bonne réponse, le démarche compte plus* ».

[85] On peut penser ici à un raisonnement du type « 12 x 12 donne 144 et j'ajoute un treizième 12 pour arriver à 156 » ou bien « 12 x 10 donne 120 et j'ajoute 36 qui correspond au produit de 3 fois 12 », etc.

*Figure 26 - Répartition des pourcentages des types d'arguments avancés par les élèves-enseignants pour*




Par ailleurs, les élèves qui prennent position pour Pascal l'argumentent sur la véracité de la réponse comme on peut le lire sur la figure 26. On constate par la suite que les types d'arguments invoqués sont plutôt variés : les catégories où les sujets se réfèrent à ce qu'ils connaissent (comparaison au connu) ou sur le raisonnement de Pascal venant de loin en deuxième place. Puisque davantage d'élèves choisissent de prendre position pour Pascal, on constate que la réponse est un élément important sur lequel les élèves portent leur attention (24 sujets l'ont nommé sur la stratégie de Pascal), mais on note aussi que l'argumentaire et la clarté sont des éléments de communication mis de l'avant par presqu'autant d'élèves (15 sujets pour la stratégie de Mylène et 5 sujets pour la stratégie de Pascal).

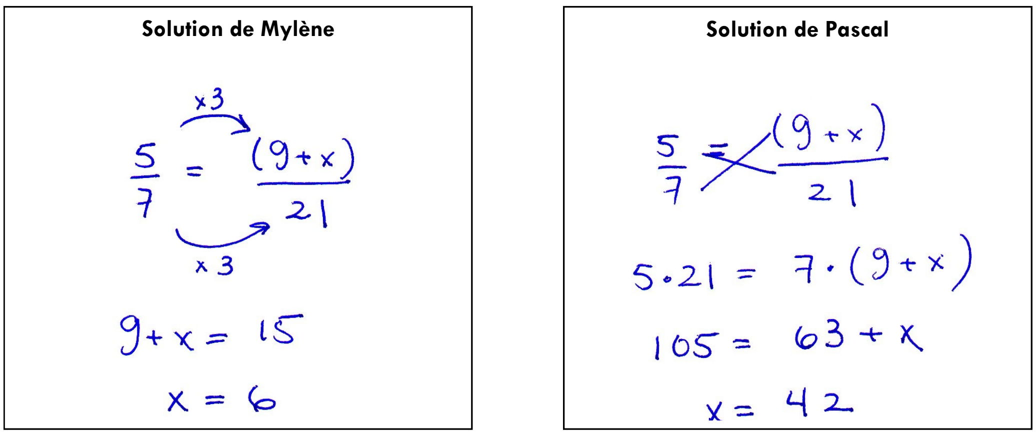
Un sujet prend position pour Pascal étant donné sa bonne réponse, mais soulève une imprécision dans la démarche de ce dernier : « *Pascal a mieux réussi, car il a une bonne réponse, mais son équation est mal faite au contraire de Mylène qui elle à une mauvaise réponse, mais une meilleure équation* » (sujet # 17, groupe SÉ).

**Analyse plus spécifique de la communication dans la troisième équation**

Dans la troisième équation (figure 27), la prise de position des élèves retourne vers Mylène (43 sujets) qui réalisent une démarche « moins classique » que celle du produit croisé de Pascal. Or, peu d'élèves (seulement huit) prennent pour ce dernier contrairement à ce qui était anticipé dans l'analyse a priori.

*Figure 27 - Solutions de Mylène et Pascal à la troisième équation*

**Équation 3 :** $\frac{5}{7} = \frac{(9+x)}{21}$



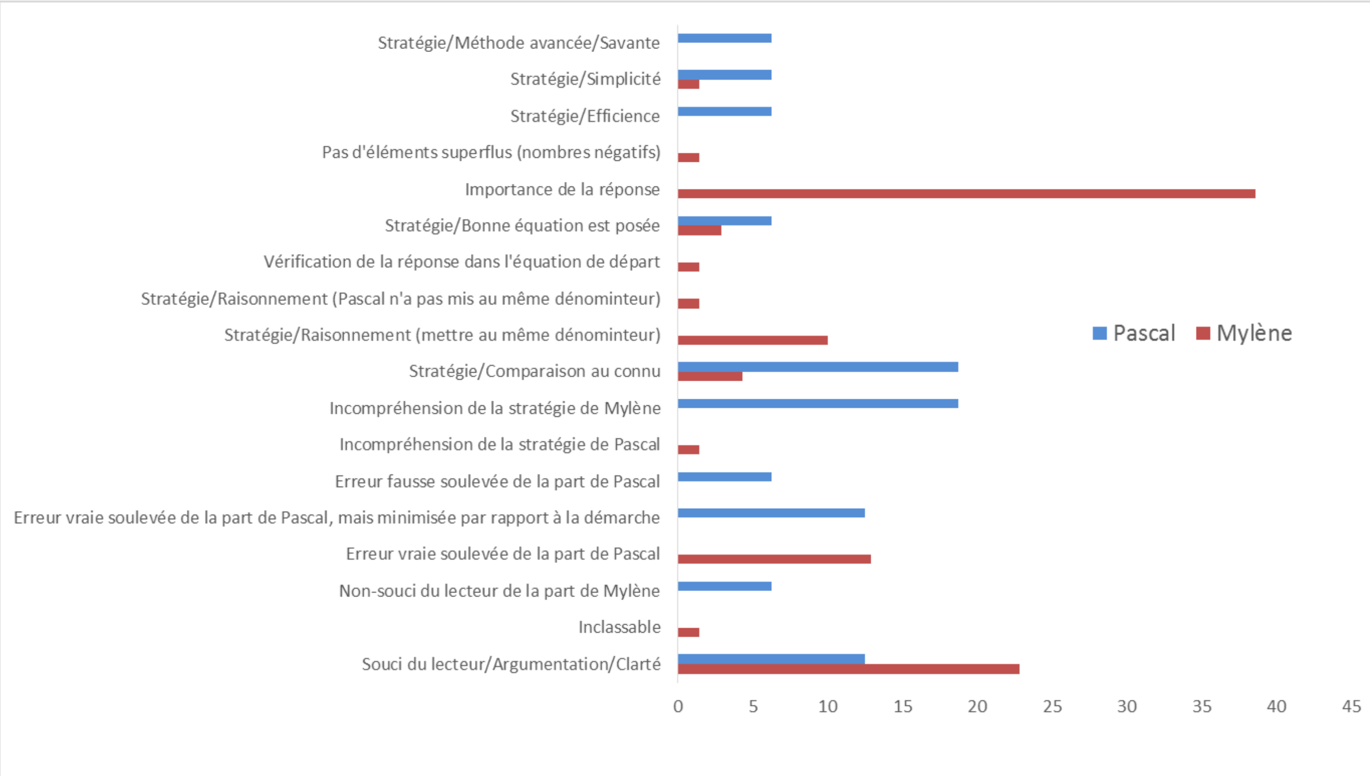

Mylène omet de rendre compte de certains pas de transformation dans la démarche de résolution : elle élimine, sans le montrer, le dénominateur et déduit que le numérateur « 9 + x » est égal à 15 (la multiplication de 5 et 3La démarche de Pascal paraît a priori plus efficace quant à sa démarche de calculs, mais il ne précise pas pourquoi la méthode du produit croisée fonctionne. Si, dans un contexte arithmétique, le recours au fait que « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens » est une technique qui est utilisée, elle ne semble pas avoir encore fait sa place dans un contexte de communication algébrique. Du <u>**tableau 37**</u>, on voit que peu de sujets (trois sujets seulement) discourent sur la technique de Pascal et optent pour cette stratégie dans leur production personnelle. La grande majorité des élèves font une résolution semblable à Mylène en multipliant le 5/7 par 3 (et en montrant explicitement cette multiplication) pour former une fraction équivalente avec un dénominateur de 21 et ainsi pouvoir comparer les numérateurs pour résoudre l'équation. Par contre, dans les réalisations personnelles de plusieurs sujets (13 sujets), la présence de quelques implicites sur le plan de la communication sont repérés, notamment la « disparition du dénominateur 21 » dans les étapes de résolution ou « la multiplication par 3 » qui est sous-entendue.

Considérons aussi que Mylène arrive à la bonne réponse alors que Pascal fait une erreur de distributivité. Des élèves s'inspirent peut-être de la démarche de Mylène après avoir remplacé sa réponse dans l'équation pour constater la véracité de celle-ci. Ces élèves exercent alors un contrôle syntaxique en vérifiant la valeur du « x » dans l'équation pour attester de l'égalité.

Toutefois, le peu de considération par les élèves de la stratégie de Pascal laisse penser, d'une part, que la stratégie ayant recours au fait que le produit des extrêmes égal au produit des moyens n'a peut-être pas été enseigné aux élèves et que donc l'élève ne s'en est jamais encore servi dans un contexte algébrique. D'autre part, le regard des élèves est fortement dirigé vers la réponse vraie de Mylène, bien que contenant des implicites, ce qui les convainc de l'adopter, d'autant plus que la réponse de Pascal est trop élevée pour l'équation formée. Si l'élève comprend que 5/7 est inférieur à 1, en obtenant une valeur de « x » égale à 42, il peut voir que la fraction à droite est supérieure à 1 (51/42) et, par conséquent, rejeter la réponse à Pascal. D'ailleurs, le sujet # 16 du groupe R argumente sa prise de position en faveur de Mylène de la manière suivante, illustrant ainsi les propos précédents : « *Mylène, car la réponse de Pascal est trop haute, et la réponse de Mylène est égale à 5/7* ».

La figure 28 montre l'ensemble des types d'arguments avancés par les élèves pour prendre position sur l'une ou l'autre des résolutions d'équations présentées. Mentionnons tout d'abord qu'en effectifs, 70 types d'arguments sont codés dans les prises de position en faveur de Mylène comparativement à 16 pour les prises de position en faveur de Pascal. Les pourcentages des types d'arguments pour prendre position pour Pascal doivent donc être interprétés avec nuance.

*Figure 28 - Répartition des pourcentages des types d'arguments avancés par les élèves-enseignants pour prendre position sur les productions de Mylène et Pascal dans la troisième équation*




De cette figure, on constate que la bonne réponse de Mylène, sa clarté et son argumentation orientent les prises de position en sa faveur. Par contre, quelques sujets nuancent l'argumentaire de cette dernière en apportant des critiques à l'égard de sa démarche. Citons en exemple les quatre sujets suivants :

- Sujet # 6, groupe SÉ : « *Mylène, car elle a employé la technique du même dénominateur. Par contre, sa démarche n'était pas complète* ».
- Sujet # 15, groupe SÉ : *« Mylène, car elle a multiplié par 3 pour enlever le 21, mais elle n'a pas laissé de traces* ».
- Sujet # 21, groupe SÉ : « *Mylène, car elle a la bonne réponse, mais elle a sauté quelques étapes* ».
- Sujet # 24, groupe SÉ : « *Mylène, car elle a eu la bonne réponse. Sa démarche est claire, mais il manque les traces de ses calculs* ».

La conviction des sujets semble être emportée par la bonne réponse de Mylène.

Pour les élèves-enseignants qui prennent position pour Pascal, deux sujets minimisent la réponse erronée de Pascal en repérant les erreurs qu'il fait dans son raisonnement :

- Sujet # 5, du groupe SÉ : « *Pascal, car sa démarche avec les produits croisés est intelligente et je la comprends mieux que celle de Mylène, même si elle a eu la bonne réponse. Pascal a seulement oublié de distribuer son 7 avec le « x », sinon, sa réponse aurait été bonne* ».

- Sujet # 9, du groupe R : « *Pascal parce que c'est un bon truc qu'il a fait « les produits croisés », mais par contre, il a oublié de mettre « 7x » et il a oublié de diviser 42 par « 7x » »*.

Les deux prises de position précédentes laissent penser que des sujets ne fondent pas uniquement leur jugement sur la « bonne réponse », mais accordent une importance à la démarche. Malgré sa réponse erronée, Pascal présente une démarche si claire, qu'on est capable d'y repérer les oublis ou imprécisions. Les deux sujets précédents insistent sur « l'intelligence » et l'efficacité de la démarche à l'avantage de la réponse erronée. Le sujet # 5 laisse toutefois entrevoir qu'il apprécie mieux la stratégie de Pascal à celle de Mylène (qui elle utilise des fractions équivalentes) laissant ouverte la question à savoir s'il comprend la stratégie de Pascal (restitue-t-il le « truc » appris, pour ensuite se centrer sur les opérations erronées?). Il pourrait aussi opter pour la stratégie de Pascal puisqu'il ne comprend pas celle de Mylène. Dans cette deuxième alternative, le choix de la stratégie de Pascal est un rejet de la stratégie de Mylène qui paraît plus complexe.

*4.1.2.2.3 Synthèse quant aux prises de position des sujets dans les situations de l'Enseignant et des Équations*

Dans cette section, il est montré que le jeu sur l'interlocuteur au travers les six situations semble avoir un impact sur les types d'arguments avancés par les élèves. Dans la situation de l'*Enseignant*, deux stratégies avec des bonnes réponses sont présentées aux élèves-enseignants contrairement à la situation des *Équations* où, dans les deux productions des élèves-fictifs, l'un arrivait à une bonne réponse, l'autre non. Dans la situation des *Équations*, la réponse « vraie » influence grandement la prise de position. Dans l'*Enseignant*, puisque les deux réponses sont vraies, il semble que les élèves-enseignants orientent leur prise de position vers d'autres éléments de communication, notamment l'argumentation, la clarté et la simplicité des stratégies. C'est à croire que les élèves se disent « *les réponses sont bonnes, observons autre chose* ».

Dans l'*Enseignant*, la plus grande diversité et richesse des stratégies proposées forcent donc les élèves-enseignants à s'expliquer puisque l'argumentaire doit reposer sur d'autres éléments que la bonne réponse. L'élève-enseignant appuie alors sa prise de position sur une analyse plus fine à partir d'autres types d'arguments travaillant ainsi des éléments de validation. Il doit se détacher de la réponse et convaincre son enseignante qu'il fait le bon choix amenant ainsi une plus grande richesse dans les arguments avancés. Le décodage des stratégies présentées amène ainsi une analyse plus pointue des éléments de la communication dans cette situation dont la qualité du raisonnement et une analyse plus fine des savoirs en jeu.

Amener aussi les élèves à prendre position sur des réalisations d'équations simples sans contexte (*Équations*) semble moins favoriser l'explicitation des raisonnements mis en jeu par les élèves-fictifs comparativement aux stratégies plus élaborées et en contexte dans la situation de l'*Enseignant*. Devant des résolutions d'équations (des phases d'action d'élèves-fictifs), les élèves-enseignants prennent position principalement sur des arguments liés à la véracité de la réponse. Ils entrent moins dans une phase de formulation des stratégies, n'ayant en plus pas de contexte sur lequel appuyer leur prise de position comme dans la situation de l'*Enseignant*. Les registres de représentation sont aussi plutôt limités dans la situation des *Équations* (principalement des calculs et des équations algébriques intermédiaires). L'emploi d'une variété de registres par Amélie et Maxime dans la situation de l'*Enseignant* vient en quelque sorte nourrir l'argumentaire dans la prise de position. Les élèves-enseignants discourent davantage sur l'usage des registres, sur leur pertinence, sur leur rigueur, leur précision, etc.

Dans la situation des *Équations*, la position « d'enseignant » est plus implicite. À cet effet, aucun élément de communication directement sur les solutions de Mylène et de Pascal n'est repéré en comparaison avec la situation de l'*Enseignan*t où plusieurs éléments sont commentés (notes chiffrées; des « *B* », des propositions d'amélioration des calculs, etc.).

Enfin, l'enjeu dans les deux situations ne semble pas le même. Les prises de position semblent moins riches en termes de communication dans les *Équations,* les élèves-enseignants y voyant probablement des tâches plus routinières sur lesquelles discourir que dans la situation de l'*Enseignant*. Le moment didactique de réalisation de la situation des *Équations* influence peut-être l'argumentation en jeu. Cette hypothèse ouvrant ainsi la porte pour la prochaine sous-section.

Dans la prochaine section, une analyse sera faite quant à l'effet du moment didactique de passation des situations sur l'argumentation.

#### *4.1.2.3 L'influence du moment didactique de réalisation de la situation sur l'argumentation*

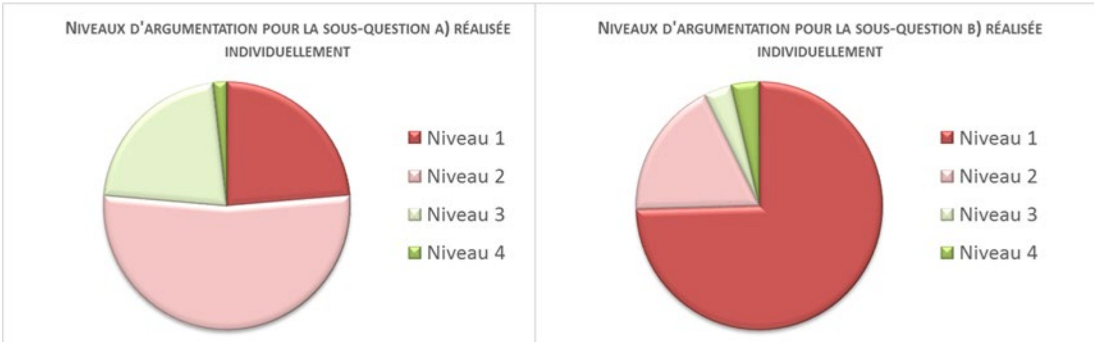
Le moment didactique de passation des situations influence l'argumentation des élèves. En effet, certaines situations, de par le moment où elles sont présentées aux élèves, mènent à des niveaux d'argumentation plus bas ou plus élevés en fonction de la grille d'analyse. Ce résultat est particulièrement frappant dans la réalisation de la situation du *Magicien*.

A priori, il était anticipé dans cette situation que, n'ayant pas le discours algébrique à leur portée puisque l'enseignante ne l'a pas encore explicitement enseigné, les élèves discourront davantage en mots pour expliquer le fonctionnement du truc de magie. Ce n'est pas ce qui s'est produit : les sujets ont de la difficulté à argumenter leur raisonnement restant dans une phase d'essais de nombres pour attester de la véracité du truc de magie. Aucune stratégie individuelle reposant uniquement sur les explications en mots n'est repérée (voir à cet effet le **tableau 27**)

La figure 29 montre les niveaux d'argumentation obtenus par les sujets lors de la réalisation individuelle de la situation[86]. Les niveaux d'argumentation sont moins élevés dans la situation du *Magicien*.

[86] Dans la prochaine section, nous analyserons l'impact du travail dyadique sur les niveaux d'argumentation.

*Figure 29 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées individuellement*




La situation du *Magicien* semble être un moment de « première rencontre » pour les élèves contrairement à la situation des *Allumettes* par exemple qui est un moment de « travail sur la technique » au sens de Chevallard[87]. En effet, les élèves n'ont jamais abordé ce type de tâche auparavant et ne maîtrisent pas de discours pour arriver à répondre à la question qui cherche à expliquer une identité algébrique. Aucune démarche de résolution de ce type de problème ne peut être enseignée comme dans les *Allumettes*, l'*Enseignant*, le *Déménagement* ou les *Équations*. Pour ces situations, certaines stratégies ou techniques sont enseignées et réinvesties ensuite par les sujets. Les moments didactiques de ces situations ne sont pas si éloignés en termes de connaissances des élèves.

Le moment didactique de la situation de la *Balance* paraît, quant à lui, aussi un moment de première rencontre non pas toutefois parce que les élèves n'ont pas les savoirs mathématiques pour le résoudre, mais bien par sa présentation différente (sans nombre, uniquement présentés en dessins et ouvrant une possibilité de stratégies et d'usage de registres (voir **section 4.1.2.1.1**)).

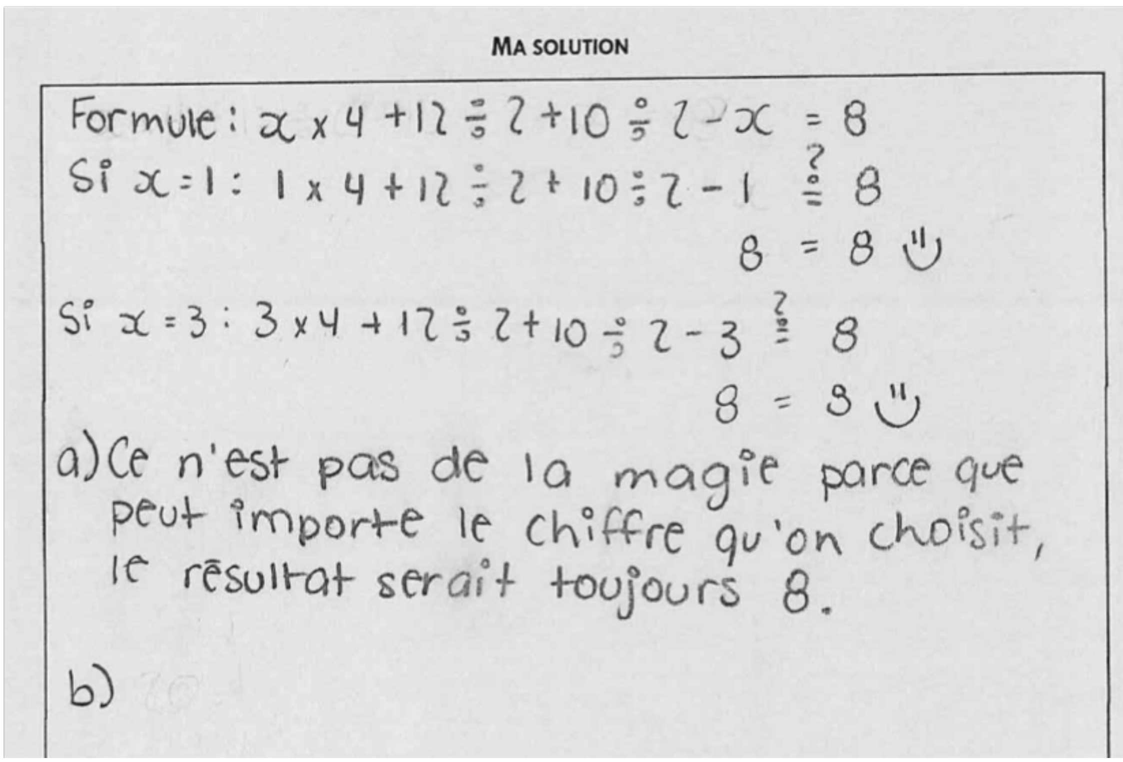
Dans le *Magicien*, les élèves cherchent à comprendre le problème, à découvrir le truc de magie, mais ne sont pas en mesure de formuler leur raisonnement. Les élèves n'ont pas les mêmes outils de communication à leur portée (tableau, table de valeurs, définition des variables, mise en équations algébriques, etc.) pour généraliser leur raisonnement ou, si ces outils sont disponibles, ils ne voient pas comment ces derniers peuvent être utilisés au *Magicien*. Pour reprendre des concepts de la praxéologie de Chevallard, ils restent dans la technique (de nombreux essais du truc de magie) sans être en mesure d'amorcer un discours technologique en mots et encore moins à l'aide de l'algèbre.

[87] Chevallard (1999), dans la TAD, distingue quatre groupes de moments didactiques. Le premier groupe englobe les moments de première rencontre, d'exploration d'une technique et de l'émergence d'une technologie et les moments de la construction du bloc « technologico-théorique » (introduction). Les moments de l'institutionnalisation constituent le second regroupement. Viennent ensuite en troisième groupe les moments du travail des praxéologies qui sont des réinvestissements par des exercices et des problèmes (un moment de travail particulier de la technique). Enfin, le quatrième groupe, est le moment de l'évaluation (du contrôle).

Certains sujets ont l'intuition que l'algèbre peut permettre d'isoler pour se « débarrasser » du nombre choisi au départ, peu importe le nombre. On voit poindre une amorce de généralisation à partir du discours algébrique. Le sujet # 19 du groupe SÉ à la page suivante en est un exemple.

Le sujet # 19 est placé au niveau 3 pour le critère de l'argumentation puisqu'on note une certaine prise en compte de l'interlocuteur par l'ajout de marqueurs de relation (« si ») le guidant dans la solution présentée. Encore une fois, il faut en convenir que cette prise en compte de l'interlocuteur est minimale. Ce sujet n'a été à même d'expliquer que ses opérations mitoyennes à partir du moment où on choisit un nombre s'éliminent.

*Figure 30 - Solution du sujet # 19 du groupe SÉ*



MA SOLUTION

Formule : $x \times 4 + 12 \div 2 + 10 \div 2 - x = 8$

Si $x = 1$ : $1 \times 4 + 12 \div 2 + 10 \div 2 - 1 \stackrel{?}{=} 8$

$8 = 8$

Si $x = 3$ : $3 \times 4 + 12 \div 2 + 10 \div 2 - 3 \stackrel{?}{=} 8$

$8 = 8$

a) Ce n'est pas de la magie parce que peut importe le chiffre qu'on choisit, le résultat serait toujours 8.

b)

Le contexte ludique de la situation vient aussi teinter l'argumentation et l'engagement des sujets dans le *Magicien*. Le contexte ludique semble orienter indirectement les élèves vers une « déscolarisation » de leur argumentation, c'est-à-dire une argumentation plus vulgarisée, moins formelle : on souhaite expliquer le truc de magie et piéger. Il est impossible de reproduire un algorithme mathématique pour résoudre le problème. Dans les *Allumettes*, le contexte est relativement connu et davantage « scolaire » et les outils pour soutenir l'argumentaire le sont également: la vaste majorité des élèves a recours à une stratégie canonique.

Dans la situation du *Magicien*, l'intention, outre la découverte du truc de magie, est d'expliquer à autrui pourquoi il n'est pas question de magie dans ce truc. L'idée mathématique sous-jacente est de généralisation une identité algébrique (*pourquoi le truc fonctionne tout le temps ?*). Même si l'outil algébrique n'est pas été introduit formellement, le discours en mots pouvait venir appuyer les observations des élèves. A posteriori, il est sans doute ambitieux de penser que les élèves puissent arriver à généraliser le truc de magie au moment où cette situation est expérimentée. Non seulement le contexte est nouveau pour les élèves dans la situation du *Magicien*, mais contrairement à la situation de la *Balance* qui ouvre le champ des stratégies possibles (appuyées par plusieurs registres potentiels à l'élève pour expliquer ses raisonnements) par sa représentation initiale, le *Magicien* est limitatif en termes de possibilités de registres pour généraliser le truc de magie.

Par contre, les élèves sont très engagés à l'idée de faire des essais pour constater que le truc de magie fonctionne. Ils acceptent une partie de la dévolution du problème, mais ne sont pas en mesure, pour la plupart, de valider pourquoi le truc de magie fonctionne. Ils comprennent que le jeu (le tour de magie) fonctionne tout le temps (ou du moins, ils le supposent sur plusieurs cas : de l'essai unique, à l'empirisme naïf menant à une amorce de généralisation), mais ils ne peuvent valider le truc. Ils restent en position de recherche pendant une bonne partie de la phase de réalisation. Dans la phase de réalisation, la dévolution du problème semble s'interrompe par le manque de stratégies de résolution et de connaissances mathématiques des élèves pour compléter la tâche. Référant à Brousseau (1998), si les savoirs à partir desquels la situation est construite sont trop éloignés des connaissances de l'élève, celui-ci risque de ne pas s'y engager. C'est probablement ce qui se produit dans le *Magicien* puisque les élèves n'ont pas tous les outils pour valider l'identité algébrique.

Résumons cette sous-section en mentionnant que, pour la situation du *Magicien*, le moment didactique de passation a une influence sur les niveaux d'argumentation observés. Le contexte nouveau de la situation peut jouer un rôle dans la qualité du discours des élèves. Toutefois, le niveau d'engagement des sujets dans la recherche d'une solution et les nombreux essais faits laissent penser que c'est la mise en mots des opérations en jeu dans l'identité algébrique et la manière dont celles-ci se réduisent pour revenir au nombre choisi au départ qui semblent être le principal obstacle : les sujets sont à un moment de première rencontre avec les discours (que ce soit en mots ou par l'algèbre) qui permettent la généralisation du truc de magie.

Dans les situations du *Déménagement* et du *Magicien*, les interactions dyadiques visant une co-construction d'un discours sur une stratégie de résolution en plaçant les élèves en équipes pour une deuxième partie de la résolution du problème sont analysées. La prochaine sous-section résume des résultats recueillis qui semblent montrer un impact positif du travail dyadique sur les niveaux d'argumentation.

#### *4.1.2.4 L'impact du travail dyadique sur l'argumentation des élèves*

Les situations du *Magicien* et du *Déménagement* sont organisées de manière à placer, tout d'abord, les élèves en contexte de résolution individuelle des problèmes, puis, ensuite en équipes pour favoriser les interactions avec un autre élève. Cette deuxième partie invite à la formulation des connaissances mathématiques en jeu dans les raisonnements individuels de chacun des allocutaires pour un locuteur afin de produire une solution écrite co-construite.

Les valeurs des variables « position attribuées aux élèves » et « interlocuteur de l'élève » varient aussi dans les deux situations. Dans le *Magicien*, les élèves doivent préalablement dégager et expliquer pourquoi le truc de magie fonctionne. Pour la sous-question a), c'est à l'enseignante qu'il adresse les explications. Dans la sous-question b), les « élèves-magiciens » doivent produire un truc de magie pour un quidam et ensuite ils doivent expliquer pourquoi leur truc de magie fonctionne, tant à un coéquipier qu'à l'enseignante.

Dans le *Déménagement*, les élèves sont en position implicite d'enseignant. Leurs interlocuteurs sont leur coéquipier dans la phase dyadique, mais aussi l'élève-fictif (s'ils adoptent la posture d'enseignant) et l'enseignante dans leur prise de position.

##### *4.1.2.4.1 Le travail d'équipe dans le Magicien*

Voyons-en quoi tous les choix de valeurs de variables influencent le travail dyadique. Les figures 31 et 32 illustrent que les niveaux d'argumentation varient entre la partie individuelle et la partie en équipes. La figure 31 montre les niveaux d'argumentation des sujets qui réalisent individuellement la situation. Ainsi, pour la sous-question a), une plus grande proportion des sujets a un argumentaire dans la zone verte (niveaux 3 ou 4).

*Figure 31 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées individuellement*

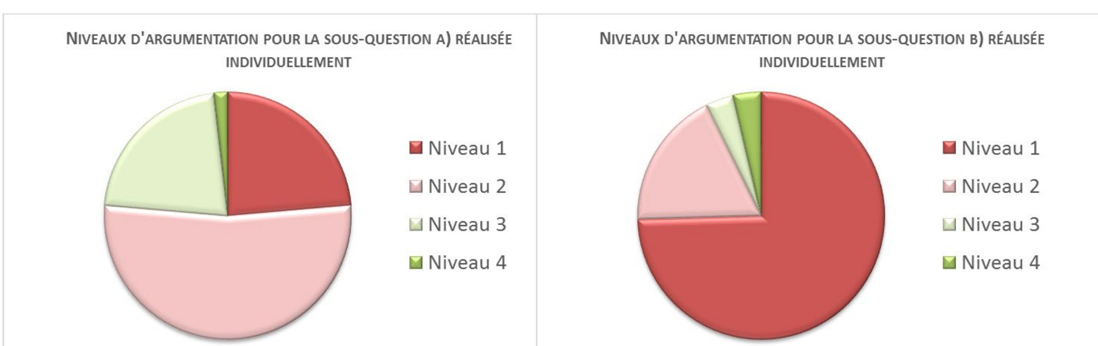
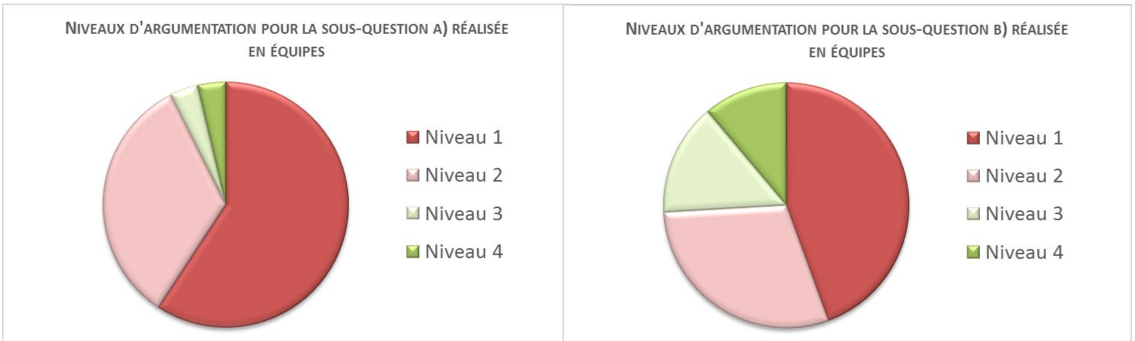


*Figure 32 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées en équipes*

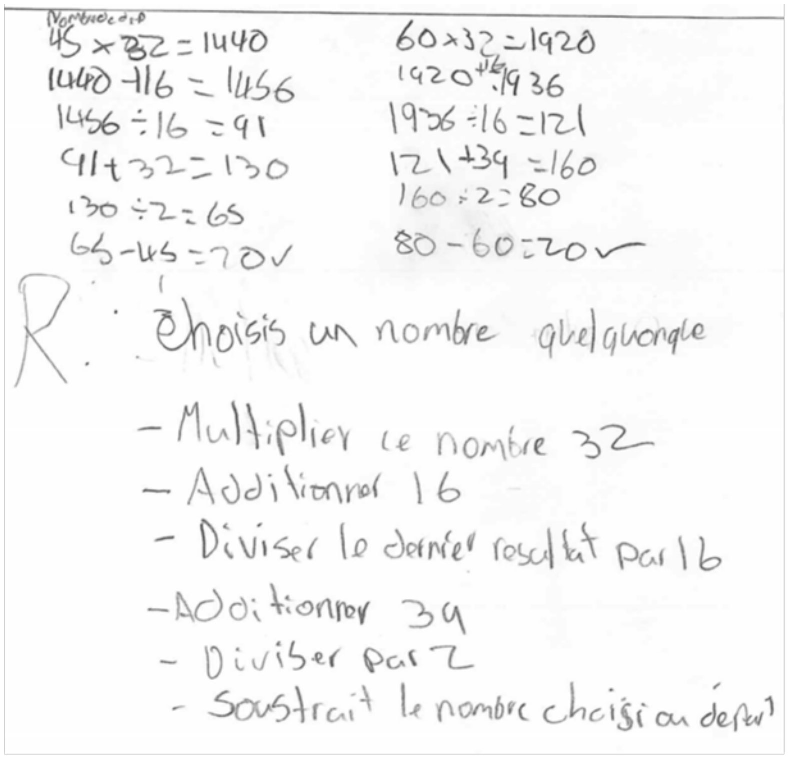



Lorsque les élèves réalisent la situation en équipe, pour la sous-question a), la portion des arguments de niveaux 3 et 4 diminue. L'illustration inverse se produit dans la sous-question b). Ces constats sont cohérents avec ce qui est observé quant à l'effet des dyades sur la production de stratégies : lorsque placés en équipes, les élèves se concentrent davantage sur la sous-question b) du problème puisqu'ils savent que le truc fonctionne (ils l'ont suffisamment exploré à la sous-question a)).

Pour avoir des indices à savoir si le travail d'équipe favorise un niveau d'argumentation plus élevé, nous avons analysé plus finement les interactions en jeu dans deux équipes lors de la réalisation de la sous-question b) de situation du *Magicien* : la production écrite de l'équipe # 9-17 en fonction des productions écrites de chacun des élèves individuellement, et la production écrite et les interactions orales de l'équipe # 15-16. Les interactions de l'équipe 15-16 ont été enregistrées.

La production de l'équipe formée des sujets # 9 et # 17 montre un contrôle des élèves sur les opérations qui constituent leur truc de magie, mais aussi la difficulté des sujets à expliquer en mots le fonctionnement de leur truc. Voici leur solution (figure 33).

*Figure 33 - Solution de l'équipe # 9-17 du groupe SÉ*



Nombre de dép

45 × 32 = 1440 60 × 32 = 1920

1440 + 16 = 1456 1920 +16 = 1936

1456 ÷ 16 = 91 1936 ÷ 16 = 121

91 + 32 = 130 121 + 39 = 160

130 ÷ 2 = 65 160 ÷ 2 = 80

65 − 45 = 20 ✓ 80 − 60 = 20 ✓

R : Choisis un nombre quelquonque

- Multiplier le nombre 32
- Additionner 16
- Diviser le dernier resultat par 16
- Additionner 39
- Diviser par 2
- Soustrait le nombre choisi au depart

L'équipe # 9-17 semble avoir un bon contrôle des opérations en jeu dans leur truc de magie étant donné les nombres manipulés. Implicitement, les sujets forment l'identité algébrique suivante :

$$\frac{\left(\frac{32x+16}{16}\right)+39}{2}-x$$

L'ordre de grandeur des coefficients utilisés et des termes constants de l'identité (additionner un terme constant de 39) laisse croire que les sujets ont un certain contrôle sur le sens des opérations qu'ils manipulent puisqu'il paraît peu naturel que d'utiliser un nombre premier dans un truc, particulièrement alors que tous les autres coefficients sont pairs et qu'on demande une division par 2. Les sujets doivent donc savoir que les opérations qu'ils créent mènent à un numérateur pair de la fraction ci-dessus. On note, chez cette équipe, une bonne maîtrise des opérations en jeu, mais peu d'explications venant appuyer leur raisonnement pour l'enseignante.

Leur maîtrise du truc est peu explicitée, on peut l'inférer, mais semble toutefois être enrichie par l'effet de la dyade. Si, individuellement, les sujets # 9 et # 17 n'atteignent pas, pour la question b), un niveau dépassant 2, ils sont codés au niveau 3 pour leur production d'équipe. Le sujet # 17 semble aussi avoir emporté la conviction du sujet # 9 puisque ce dernier dans sa production individuelle ne faisait qu'un essai unique. Ensemble ils créent un truc assez complexe. On note que les élèves font des essais de leur truc avec les nombres 45 et 60. Ils cherchent sans doute à convaincre l'enseignante par ce qui ressemble à des expériences cruciales.

###### *4.1.2.4.1.1 L'analyse d'une étude de cas à partir des interactions enregistrées d'une équipe dans le cadre de la situation du Magicien*

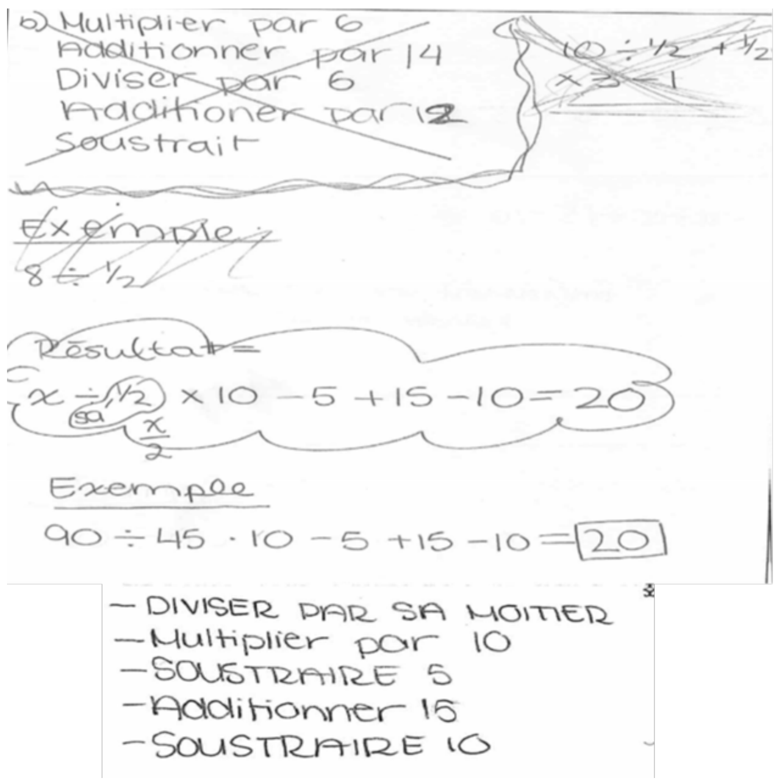
Dans le groupe SÉ, les échanges de la dyade identifiée « moyenne » par l'enseignant ont été enregistrés et leur analyse permet d'y voir, par les interactions eues par les équipiers, une co-construction d'une stratégie. Un extrait retranscrit de l'échange est présenté à l'**annexe 16**. L'échange des deux sujets montre le degré de persévérance et d'engagement dans la tâche de même que l'évolution du raisonnement des deux sujets. Il y a par contre un décalage entre la production finale remise par écrit à la fin de la séance et la richesse des interactions issues de l'enregistrement audio écouté.

À la figure 34 à la page suivante, la réponse de la question b) est présentée par l'équipe # 15-16. Dans l'échange retranscrit, d'autres interactions montrent des éléments intéressants qui témoignent de déductions faites par les équipiers : réaliser qu'il faut faire des opérations inverses (multiplier vs diviser; additionner vs soustraire); l'hypothèse formulée des nombres pairs ou celle des multiples de 20; ou bien la première étape qui élimine la variable dès le départ. Lorsqu'on lit seulement la production écrite finale, on ne repère pas ces traces réflexives (et pourtant on les entend) qui présentent des hypothèses émises pour construire le raisonnement puisqu'elles ne sont laissées par écrit. La production finale est « libérée » des traces réflexives qui conduisent vers la solution. Or, pour l'enseignant qui souhaite accéder aux raisonnements des élèves, l'enregistrement audio de l'échange est riche. Il demeure toutefois peu réaliste que l'enseignant puisse, dans un contexte de classe, accéder aux hypothèses orales émises par les élèves lorsqu'ils réalisent des situations. Dans la réalité quotidienne de la classe, c'est par le biais de questions et de commentaires, en circulant entre les équipes, que l'enseignant peut accéder au sens en cours d'élaboration de la solution, lequel peut lui servir à relancer, réajuster la production de l'élève.

Outre le fait que la production de l'équipe présentée est centrée sur une réponse finale (soit un truc en cinq étapes additives et soustractives qui fonctionne), notons, tant à l'écrit (sur la production) qu'à l'oral (dans leur échange), que les sujets ne sont pas en mesure d'expliquer pourquoi le fait de « diviser par sa moitié » dès le départ est une étape importante. La dyade reste, au sens de Chevallard, dans une amorce de discours sur les techniques. Elle n'est pas à même de dire que n'importe quelle quantité divisée par sa moitié donne la constante 2 avec laquelle il est ensuite plus facile de travailler.

L'écoute de l'enregistrement montre un écart entre la communication orale et la communication écrite. Un constat qui rejoint les difficultés évoquées dans la problématique sur le passage du registre oral au registre écrit (Vergnaud, 1998; Giroux, 2004; Rausher, 2006). En travail dyadique, à l'oral, chaque élève explique ses raisonnements et laisse à son interlocuteur une grande part d'interprétation. Il peut aussi utiliser d'autres types de langages tels que les gestes, les écrits sur un papier brouillon (qui n'est pas la feuille qui est analysée), etc., lesquels viennent enrichir la compréhension mutuelle du truc de magie. Et même si les élèves se comprennent, les éléments de communication écrits laissés sur les productions ne montrent pas explicitement les étapes du raisonnement co-construit à l'oral (et avec d'autres types de langages) mettant en évidence le caractère plus exigeant de la communication écrit et laissant par conséquent une grande part d'interprétation à l'interlocuteur.

*Figure 34 - Solution de l'équipe # 15-16 du groupe SÉ*


b) ~~Multiplier par 6~~
~~Additionner par 14~~
~~Diviser par 6~~
~~Additioner par 12~~
~~Soustrait~~

~~$10 \div 1/2 + 1/2$~~
~~$\times 3 - 1$~~

~~Exemple:~~
~~$8 \div 1/2$~~

Résultat =
$x \div 1/2 \times 10 - 5 + 15 - 10 = 20$
sa
$\frac{x}{2}$

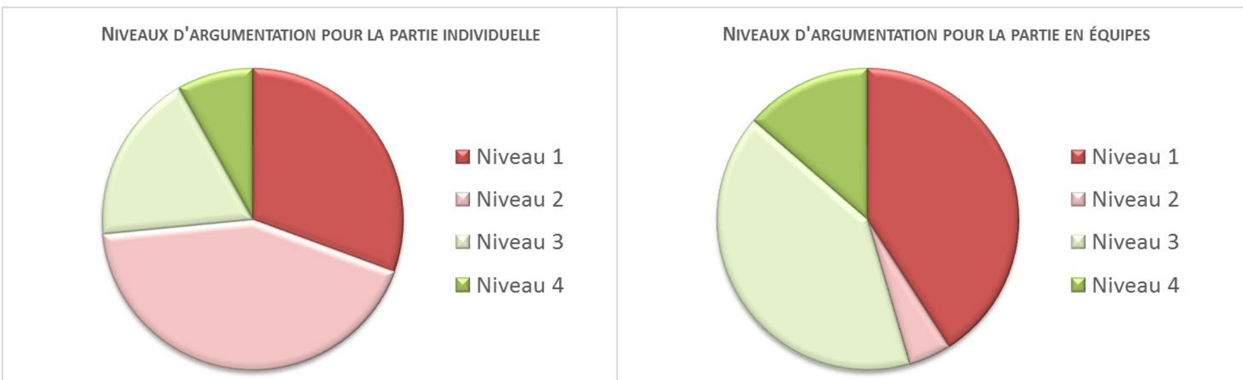
Exemple
$90 \div 45 \cdot 10 - 5 + 15 - 10 = \boxed{20}$

- DIVISER PAR SA MOITIER
- Multiplier par 10
- SOUSTRAIRE 5
- Additionner 15
- SOUSTRAIRE 10

*4.1.2.4.1.2 Le travail d'équipe dans le Déménagement*

La figure 35 montre globalement les niveaux d'argumentation comparés entre le travail individuel et le travail d'équipe dans la situation du *Déménagement*. En équipes, les niveaux d'argumentation atteignent 3 ou 4 plus souvent. On note aussi que le passage de l'argumentation du niveau 2 au niveau 3 est important. Par contre, le niveau 1 est atteint dans une plus grande proportion en équipes. Un résultat qui pourrait être attribué à la difficulté de gérer le groupe par l'enseignant suppléant : lorsque placés en dyades, certains élèves voient une autre occasion de ne pas se mettre à la tâche et de discuter[88]. Cette hypothèse est corroborée par l'écoute des enregistrements des six dyades. Malheureusement, contrairement aux écoutes de la situation du *Magicien*, aucun enregistrement ne s'est avéré pertinent. Les équipes enregistrées étant davantage dans un mode de cabotinage, plutôt que centrées sur la tâche.

*Figure 35 - Répartition des niveaux d'argumentation pour les parties individuelle et en équipes de la situation du Déménagement*



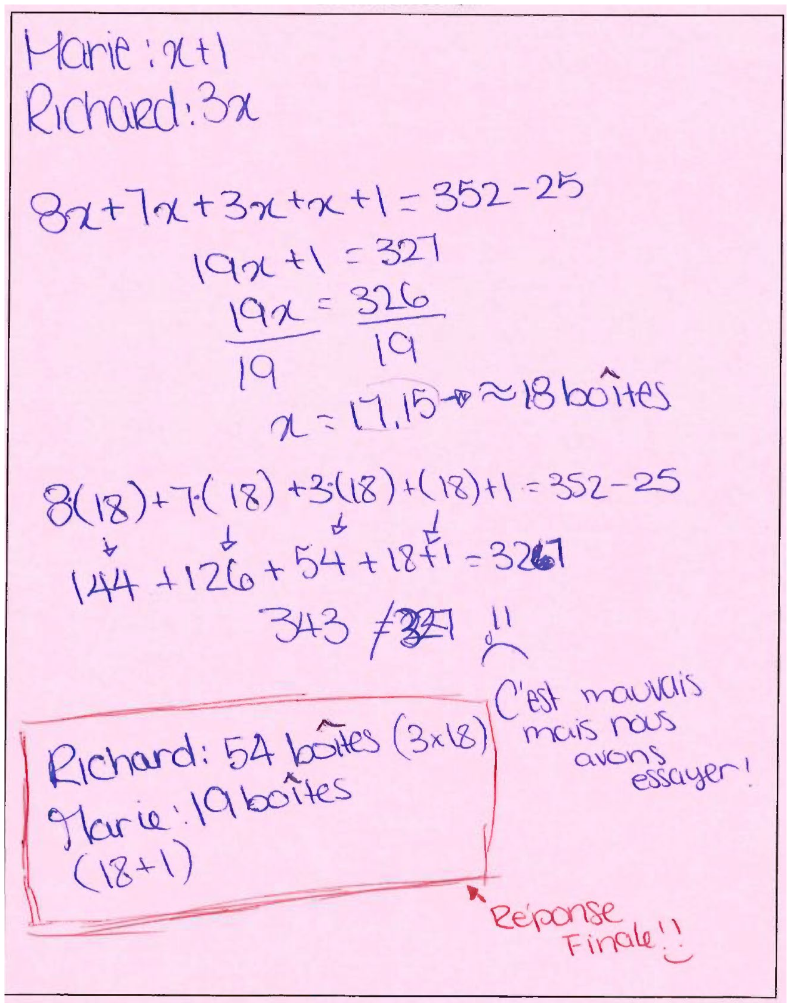

Le travail d'équipe semble avoir un impact sur la production par les élèves de stratégies adéquates ou partiellement adéquates. En effet, individuellement, environ 14% des sujets produisent une solution adéquate ou partiellement adéquate alors que ce pourcentage passe à 30% en équipes. Il semble donc y avoir un effet positif de faire travailler les élèves en équipes dans cette situation.

Cherchons à voir ce qui peut expliquer ce changement. Tout d'abord, le taux des stratégies présentant des erreurs avec la distributivité (du « 8 » sur la parenthèse (x/3+1)) diminue passant de deux sujets individuels (sur six) à aucune équipe avec cette erreur (sur sept). Ainsi, en équipes, les élèves repèrent davantage l'erreur de distributivité. Aussi, la réponse obtenue semble davantage vérifiée lorsque les élèves sont en dyades. Individuellement, seulement deux sujets (sur six) procèdent à une vérification alors que cinq équipes le font. Or, toutes les équipes qui procèdent à une vérification de leur réponse le font de manière

[88] Cette difficulté de maintenir une bonne gestion de classe dans un contexte où les interactions avec les élèves sont favorisées avait d'ailleurs été évoquée dans la problématique (Bruce, 2007).

plutôt automatique à l'exception de l'équipe # 10-17 du groupe R qui semble amorcer une validation (figure 36).

*Figure 36 - Copie-type de l'équipe # 10-17 du groupe R*


Marie : $x+1$
Richard : $3x$

$8x+7x+3x+x+1=352-25$
$19x+1=327$
$\frac{19x}{19}=\frac{326}{19}$
$x=17,15 \rightarrow \approx 18$ boîtes

$8(18)+7(18)+3(18)+(18)+1=352-25$
$144+126+54+18+1=327$
$343 \neq 327$ !!

C'est mauvais mais nous avons essayer!

$\boxed{\text{Richard: 54 boîtes } (3\times 18) \quad \text{Marie: 19 boîtes } (18+1)}$

Réponse Finale!!

L'effet des dyades dans la situation du *Déménagement*, fait progresser les élèves d'une production individuelle inadéquate, vers une production adéquate ou partiellement adéquate. Si le repérage des erreurs par le travail collaboratif des deux coéquipiers permet cette migration vers la justesse des stratégies, l'obtention par les élèves d'une copie d'élève-fictif a sans doute également joué un rôle. En effet, en décodant, à deux, la production de Renaud, les élèves sont sans doute plus à même de poser un regard sur leurs productions individuelles et, par la suite, d'y apporter des améliorations. La production de Renaud relance les sujets en phase de recherche et assure la dévolution de la situation et place les élèves en situation a-didactique par le décodage demandé. Un élève qui, par exemple, oublie de considérer les voyagements des deux véhicules dans sa production individuelle, par l'analyse de l'équation de Renaud, peut déduire que le chiffre 8 de l'énoncé est distribué sur l'une des variables. Il en va de même pour le nombre « 327 » issu de la soustraction « 352-25 », laquelle soustraction peut être inférée de la production incomplète de Renaud. Le contexte même de la situation qui présente une stratégie fictive permet probablement des stratégies plus élaborées, mais cela est difficile à affirmer sans avoir mis en place des entretiens avec les élèves.

###### *4.1.2.4.1.3 Conclusion concernant le travail en équipes et l'argumentation*

Pour conclure cette section sur l'effet des dyades sur les niveaux d'argumentation dans les productions des élèves dans les situations du *Magicien* et du *Déménagement*, on constate un effet positif du travail d'équipe sur l'argumentation qui mérite d'être exploré au-delà des données recueillies dans cette recherche. Dans la situation du *Magicien*, c'est au travers des productions de quelques équipes (à la sous-question b)) qu'on peut constater un effet positif de placer les élèves en équipes : les trucs de magie construits présentent un niveau plus élevé de défi pour piéger une victime qu'en phase individuelle. Si les trucs de magie sont parfois complexes, on constate la difficulté à désigner les opérations en jeu pour les expliquer. On doit déduire de la complexité des trucs de magie que des équipes comprennent le sens des opérations qu'ils mobilisent sans pour autant les expliquer par écrit. Par contre, l'écoute des enregistrements audios montrent par l'étude de cas présentée que les sujets verbalisent des déductions ou hypothèses vraies qui ne sont pas observées dans l'analyse de leur production écrite.

La situation du *Déménagement* a aussi permis de mettre en évidence un effet du travail d'équipe : les productions écrites des dyades témoignent d'un plus grand contrôle syntaxique et les stratégies présentent moins d'erreurs. Par conséquent, des niveaux d'argumentation plus élevés sont notés sur les productions des équipes.

##### *4.1.2.5 Le contrôle sémantique et syntaxique dans la situation du Déménagement*

Une interprétation plus fine des éléments de communication issus des productions des élèves à la situation du *Déménagement* est l'objet de cette partie. Dans l'analyse fine des stratégies de la situation du *Déménagement* (voir **annexe 13**), nous avons vu qu'une majorité d'élèves éprouvent individuellement des difficultés, tant avec le contrôle syntaxique, qu'avec le contrôle sémantique dans les stratégies qu'ils tentent de mettre en jeu.

###### *4.1.2.5.1 Quelques défis liés au contrôle sémantique dans le problème du Déménagement*

Globalement, du **tableau 34** présentant les stratégies inadéquates, des manifestations des difficultés de contrôle des élèves en phase sémantique sont synthétisées. Elles sont expliquées ci-après au fur et à mesure de leur présentation.

1- <u>La traduction de l'une ou l'autre des différentes grandeurs et relations du problème</u> :

Les éléments en jeu dans ce problème sont : le nombre d'allers-retours (voyagements), le nombre de boîtes à déménager et qui sont déménagées, le nombre de boîtes que peut contient le véhicule de Richard et celui de Marie (incluant la boîte sur le toit). En plus de les dégager, les élèves doivent pouvoir établir les relations qui existent entre ces différents éléments, variables et constantes, puis les traduire dans l'énoncé écrit en vue de pouvoir résoudre le problème.

La difficulté que représente un tel un travail de mise en équation est bien connue (Booth, 1984, 1988; Kieran, 1992; Bednarz et Janvier, 1996; Hitt, 2004). Les élèves ne sont pas toujours en mesure d'identifier ou de construire l'expression algébrique associée au problème écrit. Même s'ils arrivent à identifier les éléments pertinents, l'expression des relations entre ceux-ci demeure difficile. D'autant plus, lorsqu'il faut exprimer une variable en fonction d'une autre, par exemple ici lorsqu'il faut exprimer le nombre de boîtes déménagées par Richard en fonction de celui déménagé par Marie. L'articulation des relations ne correspond pas à une traduction littérale et demande des habiletés d'inférence pour y parvenir. L'omission d'un élément dans l'exercice n'est alors pas étonnante.

Dans le problème du *Déménagement*, on observe ainsi différentes omissions dans les productions individuelles :

- 18 élèves n'ont pas pris en compte les (allers-retours);
- 10 élèves, ont omis les boîtes restantes (352 boîtes – 25 boîtes restantes, donc 327 boîtes déjà déménagées);
- Six sujets, n'ont pas considéré la boîte placée sur le toit de la voiture de Marie.

La traduction algébrique des allers-retours dans l'équation est celle qui pose le plus de difficulté aux élèves. La compréhension du concept « d'aller-retour » apparaît difficile à saisir. L'élève doit comprendre que lors de « l'aller », l'auto ou le camion déménage des boîtes, mais qu'au retour, le moyen de transport est vide. Ainsi, un « aller-retour » permet le transport des « x+1 » boîtes dans le véhicule de Marie et de « 3x » boîtes dans celui de Richard (où « x » représente le nombre de boîtes dans l'auto de Marie). La traduction par une relation du type « *(nombre d'allers-retours) x (la quantité de boîtes que contient chacun des moyens de transport)* » exige ainsi un grand contrôle tant sémantique que syntaxique.

2- <u>La définition des variables posées au départ :</u>

Avant de poser l'équation, il est nécessaire de définir les variables. Évidemment, si les variables sont mal définies, l'équation risque d'être inexacte. Les cas où les élèves définissent les variables de manière imprécises (par exemple : « x = Marie », plutôt que « le nombre de boîtes dans la voiture de Marie ») sont différenciés des cas où la définition d'une variable en fonction d'une autre est inexacte (par exemple : « *le nombre de boîtes dans le camion de Richard est -3x* »). Ainsi, sur les 43 stratégies répertoriées :

- 10 sujets travaillent avec des variables définies de manière imprécise;
- 19 sujets identifient incorrectement la relation entre les variables (parmi ceux qui ont au moins amorcé une démarche algébrique);
- Huit sujets identifient correctement la relation entre les variables (ce qui ne veut pas dire pour autant qu'ils ont réussi à résoudre le problème).

La définition imprécise des variables provient sans doute d'une conception erronée selon laquelle les lettres représentent des objets et non pas des nombres (Booth, 1984; Günther, 1990). Cette imprécision est d'ailleurs volontairement commise dans la production de l'élève-fictif Renaud.

Le cas le plus frappant d'identification incorrecte de la relation entre les variables vient de la traduction de l'expression « *3 fois moins* » par l'expression « -3 x » pour 16 sujets sur 43 sujets au total. Le nombre élevé de sujets faisant cette traduction erronée soulève des questions sur le passage qui s'opère pour ces élèves entre le registre de l'arithmétique et celui de l'algèbre et nécessite qu'on s'y intéresse brièvement. Les sujets qui ont mal traduit l'expression « *3 fois moins* » semblent voir une utilisation amalgamée des termes « *moins* » et « *trois fois* » qui allient l'usage de l'opération arithmétique (le « *moins* ») et de l'algèbre (« *3 x* »).

*4.1.2.5.2 Quelques défis liés au contrôle syntaxique dans le problème du Déménagement*

Concernant la dimension du contrôle syntaxique, voici quelques constats notés des productions individuelle des élèves.

1- Écart entre l'écriture et les opérations effectuées:

Cet écart se manifeste surtout dans l'expression suivante:

$$8 \cdot \left(\frac{x}{3} + 1\right) = \frac{8x}{3} + 1$$

Notons toutefois que des sujets inscrivent des parenthèses dans leur équation, d'autres non. Certains ne l'écrivent pas, mais la considère correctement dans la suite de leurs calculs. Comme le note Booth (1984), les élèves ne voient pas toujours la pertinence d'utiliser les parenthèses et ne s'en servent pas.

Booth (1984) mentionne également que « ce manque d'attention au sens précis des expressions mathématiques est remarqué en arithmétique où il arrive que les enfants échangent allègrement et sans s'en alarmer le moins du monde 3÷12 à 12÷3 » (p. 16). Quand les élèves savent dans quel ordre faire leurs opérations, ils ne soucient pas de la précision dans la rédaction de leur raisonnement. Ils considèrent que leur interlocuteur les comprend puisqu'ils ont un discours partagé. C'est d'ailleurs aussi pourquoi il est présenté dans la production de Renaud plusieurs inférences à faire, tant dans sa mise en équation, que dans sa résolution, dans l'espoir que l'élève-enseignant puisse trouver les imprécisions, les comprendre, et faire des propositions à Renaud pour améliorer sa communication.

Ainsi, certains élèves écrivent la parenthèse, mais ne la traitent pas correctement. D'autres, ne l'écrivent pas, mais font le calcul requis. On constate donc que le contrôle syntaxique nécessaire à une communication/production mathématique correcte fait ici défaut.

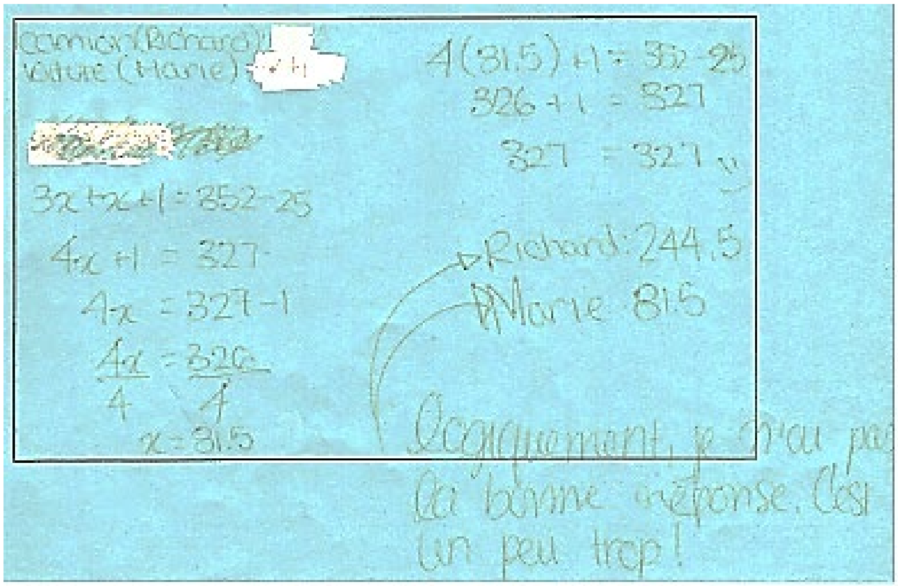
2- <u>L'élève procède à une vérification dans son équation de la réponse obtenue sans remise en question de cette dernière:</u>

L'analyse des copies écrites des élèves a aussi mis en évidence la présence assez marquée d'une vérification de la réponse par l'élève démontrant par là un contrôle syntaxique. Plus précisément, l'élève remplace sa réponse dans l'équation qu'il pose. Douze sujets sur l'ensemble des 46 stratégies analysées font une étape visant à s'assurer de la véracité de leur réponse en fonction de leur équation. Toutefois, la plupart des élèves ne remettent pas en question la valeur de leur résultat par un retour au contexte du problème : ils se contentent d'une vérification dans l'équation posée (que l'équation soit vraie ou fausse). Cette vérification semble même « mécanique », faisant partie d'une des étapes de la « méthode à cinq étapes » décrite dans l'analyse a priori. À titre d'exemple, même des élèves qui définissent une variable comme étant « -3x » vérifient la valeur obtenue dans leur équation.

Ainsi, dans les composantes de la résolution de problèmes ciblées par Saboya (2010), l'élève n'anticipe pas les conditions de validité de son résultat. Il reste dans l'action de la vérification du résultat sans y percevoir les erreurs.

Par contre, des sujets semblent dépasser le stade de la vérification et entrent dans une forme de validation. Par exemple, le sujet # 17 du groupe R perçoit au travers sa vérification du résultat dans son équation que le résultat auquel il arrive ne fonctionne pas : « *Logiquement, c'est mauvais!* ».

*Figure 37 - Copie-type du sujet # 17 du groupe R*



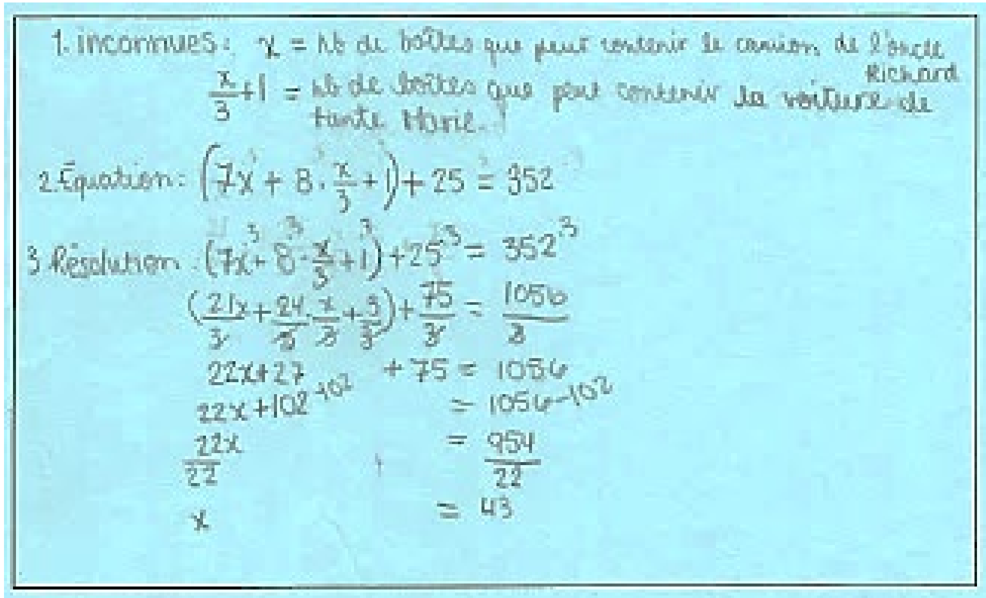

Le sujet # 17 semble aussi aller un peu plus loin. Non seulement il s'interroge sur sa résolution, mais aussi sur l'ordre de grandeur de la réponse trouvée amorçant probablement ainsi une identification de ses erreurs (« *c'est un peu trop !* »), sans toutefois arriver à surpasser la contradiction qu'il discerne en posant une action qui l'amène à dépasser le conflit cognitif qu'il perçoit.

3- <u>La perte du contexte lors de sa résolution du problème</u> :

En complément à l'idée de vérification automatique qui ne dépasse pas le stade de l'action, il semble aussi que des élèves perdent de vue le contexte du problème alors qu'ils sont plongés dans la résolution de leur équation. Ainsi:

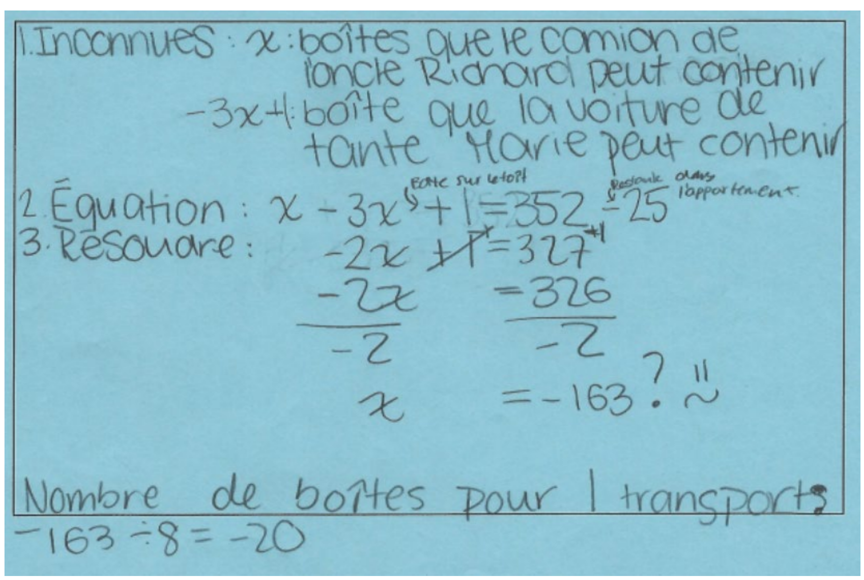
- Treize sujets ne font pas de conclusion à leur résolution, laissant ainsi la charge à l'interlocuteur, d'une part, de comprendre la valeur de « x » qu'ils viennent de trouver et, d'autre part, de conclure la résolution du problème. Le sujet # 5 (figure 38) du groupe SÉ illustre cela:

*Figure 38 - Copie-type du sujet # 5 du groupe SÉ*




- Un sujet arrive à une réponse négative (le sujet # 15 du groupe SÉ, figure 39) qui semble toutefois se remettre en question par l'ajout d'un petit pictogramme de « petit bonhomme perplexe ».

*Figure 39 - Copie-type du sujet # 15 du groupe SÉ*




La perte du contexte du problème rejoint l'un des résultats de Saboya (2010 rapporté dans Saboya Bednarz et Hitt, 2015). La chercheure explique que les élèves, face à des tâches algébriques, prennent en compte les données du problème, lesquelles sont traduites dans leur équation de sorte que « le contexte s'éloigne » (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015, p. 32). L'attention de l'élève se tourne alors vers le contrôle syntaxique alors qu'il résout son équation. Lorsqu'il arrive à son résultat, c'est à nouveau le contexte sémantique du problème qui ressurgit.

Par contre, comme on le constate dans les exemples précédents, le retour en arrière ne s'effectue pas toujours, probablement dû au processus complexe de résolution dans lequel sont engagés les élèves, mais aussi parce que le processus de contrôle syntaxique s'appuie sur l'anticipation et la perception des erreurs forçant l'élève à se réajuster. « Ainsi, une anticipation d'un résultat dans un contexte algébrique est probablement préservée pendant le traitement algébrique, et lorsque l'élève arrive à une réponse, le doute fait appel à cette anticipation et au contexte et va le renvoyer à l'analyse de sa procédure » (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015, p. 32).

Il appert, pour quelques-uns des sujets, que la vérification de la validité du résultat ne s'opère pas, l'élève se questionnant peu sur ce qu'il fait, restant dans l'action, et n'arrivant pas à formuler pour autrui son résultat.

Il se pourrait aussi que l'élève ne voit pas la pertinence d'aller plus loin dans la présentation de son résultat. D'une part, il reste dans un discours privé compte tenu du contexte de la situation du *Déménagement* qui fournit une résolution à l'élève servant de référant. D'autre part, il peut concevoir que sa réponse est une évidence pour l'interlocuteur qu'est ici son enseignante avec laquelle il a un discours partagé.

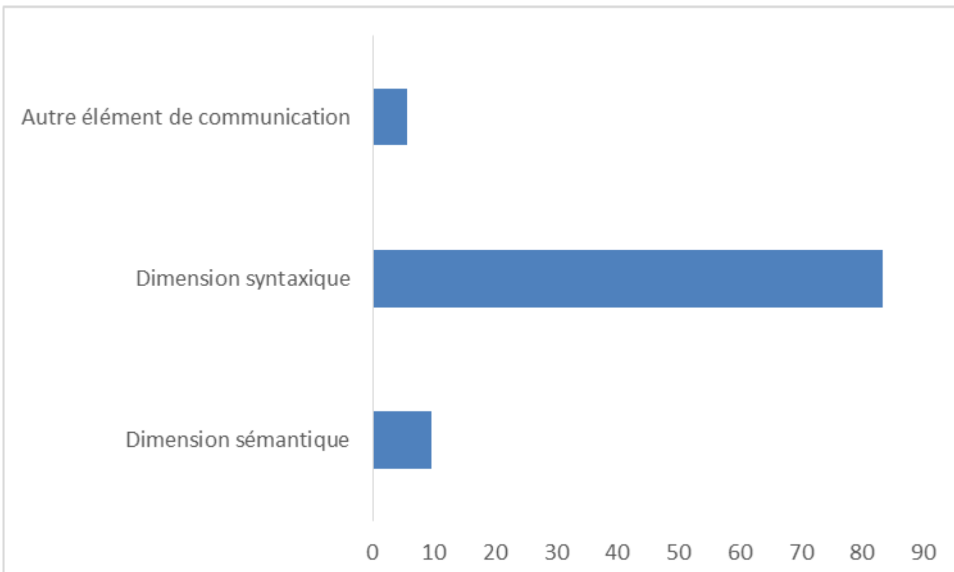
Dans la situation du *Déménagement*, on demande aux élèves de mentionner à Renaud les éléments manquants pour obtenir un 10/10. Deux équipes[89] seulement laissent des commentaires à Renaud alors que 25 sujets le font individuellement. Plusieurs de ces 25 sujets laissent plusieurs commentaires à Renaud. Il est aussi particulier, alors que la question demande de bien « *expliquer à Renaud ce qu'il aurait dû faire…* », de constater que seulement trois sujets se sont directement adressés à lui (à la 2e personne du singulier). Tous les autres sujets formulent des commentaires pour l'enseignante régulière (du type « *il aurait dû…* »). A priori, l'idée de demander aux élèves de formuler directement à Renaud des commentaires vise à s'éloigner du discours plus formel de la classe pour avoir un discours vulgarisé qui permet de voir comment les sujets formulent leur compréhension des savoirs en jeu. La majorité des élèves adoptent la posture « d'élèves qui parlent à l'enseignante » et non celle d'enseignant-implicite. En restant dans le discours « scolaire », partagé avec l'enseignante, on risque de perdre des éléments de communication : les traces laissées peuvent être moins développées. Cela ramène à la position de l'interlocuteur développée précédemment, notamment pour la situation des *Allumettes* : les élèves qui personnalisent leur stratégie (et s'éloignent des formes canoniques) ont un argumentaire plus étoffé, car ils doivent convaincre de leur raisonnement. En parlant directement à Renaud, il était souhaité que les sujets expliquent davantage

[89] Étant donné l'effectif du nombre d'équipes qui ont laissé des commentaires sur la production de Renaud, nous centrerons l'analyse sur les commentaires individuels laissés avant la phase de réalisation en équipes.

puisqu'ils doivent s'assurer de la compréhension de *leur* élève, donnant ainsi un plus grand accès à l'enseignante aux connaissances mobilisées dans les propos tenus à l'égard de la production de Renaud et par conséquent, lui donnant des leviers pour son enseignement.

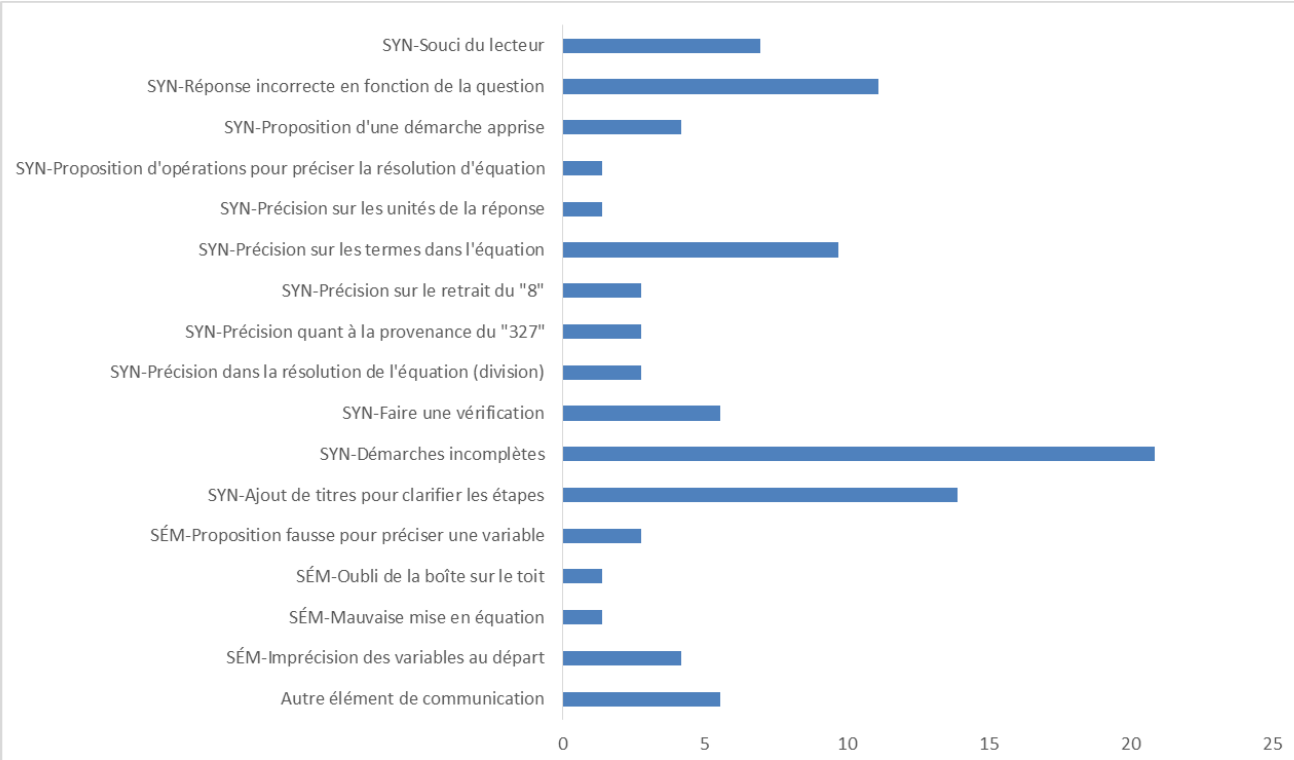
La figure 40 présente un graphique qui montre une répartition en pourcentage des commentaires généraux laissés par les sujets sur la copie de Renaud selon qu'ils relèvent de la dimension sémantique ou syntaxique. Les sujets laissent dans une grande proportion des commentaires de l'ordre de la dimension syntaxique tout comme il est constaté lors de l'analyse des traces écrites repérées sur la copie de Renaud en guise de « correction » (voir la **figure 20**).

*Figure 40 - Répartition en pourcentage de l'ensemble des commentaires laissés par les sujets sur la copie de Renaud selon qu'ils relèvent de la dimension sémantique ou syntaxique*




La figure 41, quant à elle, montre un graphique des catégories retenues pour coder les 72 éléments de communication laissés sur la copie de Renaud. Ces catégories sont construites de manière à cibler si le commentaire formulé relève de la dimension sémantique ou syntaxique en précisant sur quel élément le sujet fait un commentaire de manière à raffiner l'analyse (par exemple : « *SÉM-Oubli de la contrainte de la boîte sur le toit* » ou « *SYN-Démarches incomplètes* »).

*Figure 41 - Répartition en pourcentage des commentaires plus spécifiques laissés par les sujets sur la copie de Renaud selon qu'ils relèvent de la dimension sémantique ou syntaxique*




Dans ce graphique relativement à la dimension syntaxique, on constate que les quatre commentaires spécifiques suivants sont prédominants :

1- Les sujets soulèvent des démarches incomplètes.

2- <u>Ils proposent l'ajout de titres pour clarifier les étapes de résolution</u> : cela met en évidence un souci de l'interlocuteur, mais aussi une procédure de résolution algébrique en 5 étapes qui est souvent enseignée et dans laquelle des titres séquencent une démarche à suivre.

3- <u>Ils soulèvent une réponse incorrecte en fonction de la question posée</u> : par cela, les sujets ne se contentent pas de nommer que la réponse est incorrecte, mais ils sont à même de revenir au contexte du problème, entrant dans une phase de validation, manifestant aussi probablement des éléments de dimension sémantique en retournant à l'énoncé du problème.

4- <u>Ils soulèvent des imprécisions dans les termes de l'équation</u> : encore une fois, ces imprécisions nommées sont liées aux opérations en jeu dans les différents termes et relèvent de la clarté de la démarche et des arguments incomplets avancés par Renaud.

Bien que peu présent, dans la figure 41, les éléments rattachés à la dimension sémantique sont principalement dus à l'imprécision de la nomenclature des variables, certains sujets allant même de propositions fausses dans leurs commentaires de prise de position (par exemple : proposer « -3x ») pour préciser les variables.

Résumons la présente sous-section. La présentation du contrôle sémantique et syntaxique dans la situation du *Déménagement* met en évidence plusieurs éléments de la communication qui ont effectivement émergées de l'activité mathématique de communication des sujets. Nous souhaitions forer davantage les éléments de communication manifestés dans les productions écrites des élèves, sachant, d'une part, que ceux-ci n'ont pu être réinvestis par l'enseignante dans une phase de retour et, d'autre part, que plusieurs stratégies inadéquates ou conceptions erronées se sont révélées de l'analyse des stratégies personnelles des sujets. De plus, les commentaires et prises de position en fonction de la dimension sémantique ou syntaxique donnent des indices sur ce qui est important pour les élèves-enseignants, mais aussi, sur ce qui peut être travaillé par l'enseignante.

Une forte prévalence pour les commentaires en lien avec la dimension syntaxique est remarquée. Les sujets rencontrent plusieurs défis quant à leur propre contrôle syntaxique dans leurs réalisations personnelles. Rappelons entre autres la difficulté liée à la distributivité et à l'usage des parenthèses dans la mise en équation; la vérification sans remise en question de la réponse trouvée; et, après s'être engagés dans la résolution du problème, la perte de vue du contexte du problème en fonction de la réponse trouvée, laissant ainsi à la charge de l'interlocuteur la responsabilité d'interpréter la réponse trouvée.

Sur un plan sémantique, il est noté peu de traces de discours sur la production de Renaud de la part des sujets qui doivent la commenter. Un travail reste à faire sur le choix des variables dans ce type de problème : les sujets semblant comprendre la variable comme un objet et non pas un nombre qui peut varier. Des imprécisions sémantiques du type « x = Marie » sont repérées appuyant ce résultat. Il serait toutefois intéressant de valider si cette écriture de la variable est un raccourci pour communiquer plus succinctement avec une interlocutrice considérée comme l'enseignante (« *on sait tous les deux que la variable est un nombre* ») ou bien si cette écriture est réellement une incompréhension de la signification du concept de variable. Les nombreuses définitions des variables repérées, notamment celle où le camion contient « -3x » boîtes laisse penser qu'un travail est encore à faire sur le concept de variable puisque les sujets sont toujours en appropriation du discours algébrique.

Les problèmes écrits comme celui au cœur de la situation du *Déménagement* constituent aussi un haut niveau d'exigence de contrôle sémantique pour repérer toutes les données pour ensuite les traduire dans une équation. Dans la situation, la production incomplète de Renaud contribue probablement au contrôle sémantique des sujets, ces derniers repérant dans la réalisation fictive, des éléments partiels de communication permettant de mieux comprendre les relations existantes entre les variables.

La prochaine sous-section présente les résultats du deuxième critère de la grille qui est commun à l'ensemble des six situations, soit celui de l'organisation et de l'esthétisme[90].

### *4.1.3 L'évolution de l'organisation des stratégies dans les six situations*

L'organisation et l'esthétisme sont codés sur une échelle descriptive de 1 à 4 pour toutes les situations. Des graphiques comparatifs d'une situation à l'autre sont présentés à l'**annexe 15**. Rappelons l'indépendance de ce critère par rapport à l'exactitude des stratégies mobilisées par les sujets et par rapport au niveau d'argumentation. Un sujet peut présenter une stratégie inadéquate qui mène à une fausse réponse, avec de faux arguments, mais montrer toutefois un haut niveau d'organisation et d'esthétisme. Les données présentées par les graphiques doivent être interprétés avec nuance puisqu'ils ne permettent pas de conclure que l'élève maîtrise les savoirs mathématiques en jeu dans la situation. Les dimensions de l'organisation et de l'esthétisme sont importantes. Elles sont toutefois des dimensions de la communication de « forme » plutôt que de « fond » comme l'est, par exemple, l'argumentation. Les sujets accordent une importance à ces dimensions dans le regard qu'ils posent sur des copies d'élèves-fictifs par les commentaires laissés (prenons par exemple le commentaire sur la situation du *Déménagement* qui demande à Renaud d'ajouter des titres pour clarifier sa production).

Présentons et analysons sommairement les résultats qui ressortent du codage des productions écrites des sujets par situation.

#### *4.1.3.1 L'organisation et l'esthétisme dans la situation des Allumettes*

Rappelons que la plupart des sujets maîtrisent déjà une stratégie (appelée stratégie canonique) pour résoudre ce genre de problème de suite arithmétique. Les sujets ont sous la main une stratégie enseignée, tant par ses étapes (*ce qu'il faut faire*) que par sa structure (*comment le faire* : table de valeurs; recherche du taux de variation; etc.).

Le tableau 12 à la page suivante présente une répartition des stratégies répertoriées aux niveaux 3 ou 4 du critère de l'organisation pour les sous-questions a) et c). Ces sous-questions sont choisies puisqu'elles sont intimement liées dans la résolution de la situation : la plupart des élèves généralisant tout d'abord une règle leur permettant de répondre à la sous-question a). Par cela, ils répondent également à la sous-question c).

Dans ce tableau, il est possible, d'une part, de constater que des élèves peuvent avoir un niveau élevé d'organisation (N3 ou N4), sans pour autant mobiliser une stratégie adéquate. D'autre part, à la sous-question c), on remarque que 13 sujets atteignent un niveau 3 ou 4 en utilisant la règle « 3n + 1 » laquelle est construite à partir de la méthode canonique.

---

[90] L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation.

*Tableau 12 - Stratégies de la situation des Allumettes codées aux niveaux 3 ou 4 du premier critère définit par l'organisation et l'esthétisme pour les sous-questions a) et c)*

| | **Question a)** | | **Question c)** | |
|---|---|---|---|---|
| | N3 | N4 | N3 | N4 |
| **Effectifs** | **13** | **8** | **15** | **6** |
| *Stratégies adéquates* | ***3n+1*** (7)<br>***4+3(n-1)*** (2)<br>***4n-(n-1)*** (1)<br>***Essais*** (1) | ***3n+1*** (6)<br>***3(n-1)+4*** (1)*<br>***Essais*** (1) | ***3n+1*** (8)<br>***4+3(n-1)*** (3)*<br>***4n-(n-1)*** (2)<br>***Essais*** (2) | ***4+3(n-1)*** (1)<br>***3n+1*** (5) |
| *Stratégies partiellement adéquates* | ***Aucune*** | ***Aucune*** | ***Aucune*** | ***Aucune*** |
| *Stratégies inadéquates* | ***3n*** (1)<br>***4n*** (1) | ***Aucune*** | ***3n+4*** (2) | ***Aucune*** |

**Un sujet a fait deux stratégies vraies*

Par ailleurs, on note également que des sujets qui réalisent des stratégies à partir d'une construction plus personnelle se retrouvent également à des niveaux 3 ou 4. Ces sujets avec des stratégies plus personnelles recourent davantage au registre des mots pour communiquer avec leur interlocuteur leur démarche. Les explications en mots bien organisées permettent aussi de bien suivre le raisonnement de l'élève.

Dans le cas de la stratégie canonique, il semble que la diversification des registres vient appuyée l'organisation de la solution. La plupart des élèves qui utilisent la stratégie canonique enseignée ont recours à une table des valeurs (registre sous forme de tableau); une règle (registre algébrique) et une description en mots de leur réponse ou démarche (registre en mots). Ils démontrent alors un plus haut degré d'organisation et d'esthétisme puisqu'il est facile de repérer les étapes de résolution appuyées par plusieurs registres.

Dans les *Allumettes*, la structure enseignée de la forme canonique construite à partir de plusieurs registres et les explications en mots des élèves qui cherchent à convaincre de leur stratégie sont des éléments-clés de communication qui influencent l'organisation.

#### *4.1.3.2 L'organisation et l'esthétisme dans la situation du Magicien*

Dans le *Magicien* aucune technique de résolution ne peut être mobilisée. Bien que les sujets se soient engagés dans la réalisation du problème du *Magicien*, le moment didactique de passation influence grandement les stratégies mathématiques et le discours pour expliquer les raisonnements en jeu. Lors de la réalisation de la situation, individuellement, ce sont davantage les registres des mots et l'arithmétique qui sont utilisés par les élèves, particulièrement pour la question a), la question b) ayant obtenu un moins grand taux de réponse. On ne voit pas autant de diversité de registres de représentation venant appuyer le raisonnement mobilisé par les élèves dans la situation du *Magicien* que dans celle des *Allumettes*.

Les figures 42 et 43 présentent les niveaux d'organisation et d'esthétisme pour les deux sous-questions pour, d'une part, la phase de réalisation individuelle, et, d'autre part, la phase dyadique. Rappelons que le niveau d'engagement des élèves est différent en phase individuelle et en équipes pour les deux sous-questions : individuellement, les élèves sont très engagés dans une phase d'essais dans la sous-question a), alors qu'en équipes, c'est principalement dans la sous-question b) que les équipiers s'engagent et délaissent la partie a) (voir à cet effet la **section 4.1.1.2.1**).

*Figure 42 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées individuellement*

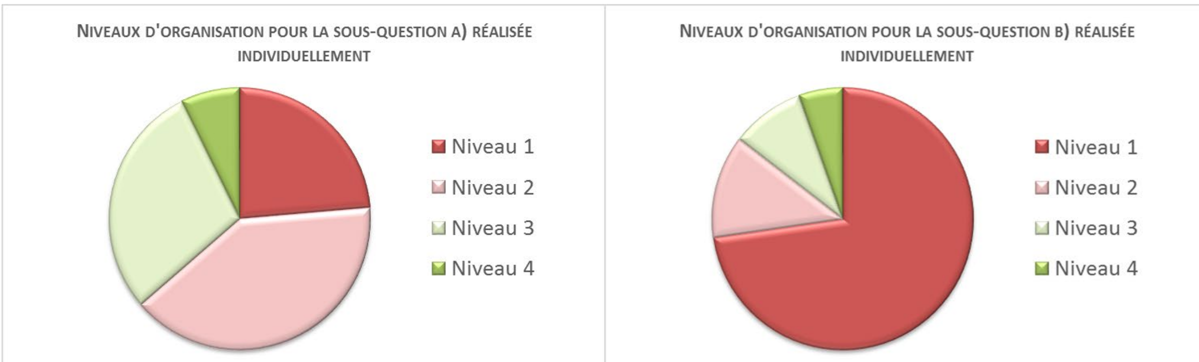
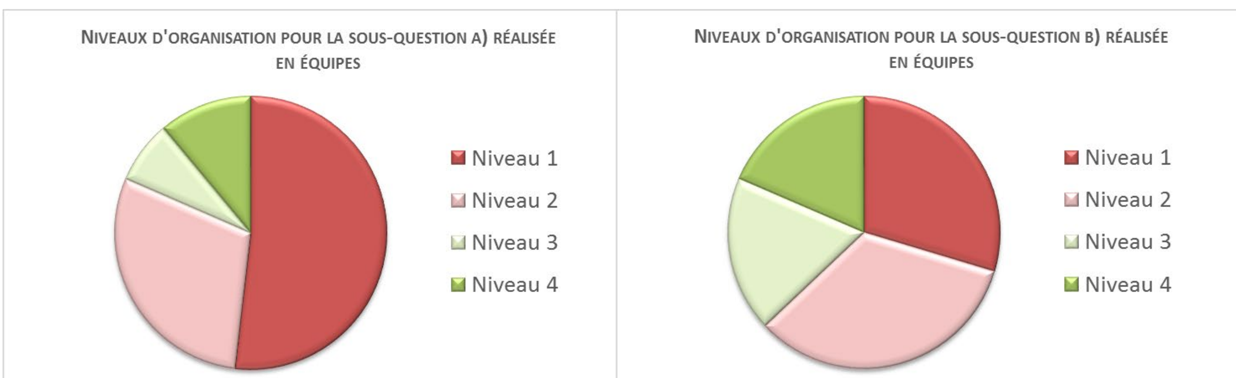



*Figure 43 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées en équipes*




Pour la partie a), les sujets s'engagent dans des essais numériques pour se convaincre que le truc de magie fonctionne. C'est principalement par des calculs, parfois numérotés, que l'on peut juger de l'organisation.

Dans la partie b), les élèves doivent séquencer en cinq étapes un truc de magie pour piéger un interlocuteur tout en expliquant le fonctionnement de leur truc.  Si les explications sont plus difficiles à formuler pour des raisons expliquées précédemment, l'organisation de la production, quant à elle, présente tout de même des hauts niveaux. En effet, les élèves reproduisent la structure du truc de magie qui leur est présentée. Les élèves ont un modèle de truc de magie présenté en colonne de cinq étapes succinctement présentées. Les sujets formulent leur truc sur le même gabarit permettant alors bien suivre leurs étapes de résolution.

Dans la situation du *Magicien*, ce n'est pas la variété des registres en usage qui influence le critère de l'organisation. Les élèves ont à leur disposition peu de registres pour résoudre la situation. Dans la sous-question a), c'est l'organisation des essais numériques qui oriente les niveaux attribués au premier critère. Dans la sous-question b), c'est l'influence de la structure du truc de magie présenté dans l'énoncé qui semble aider à l'organisation des sujets (principalement alors qu'ils sont en dyades) : les sujets s'y réfèrent en exemple.

#### *4.1.3.3 L'organisation et l'esthétisme dans la situation de l'Enseignant*

La situation de l'*Enseignant* donne lieu à l'usage d'autres stratégies appuyées notamment par des mots ou des schémas comparativement aux *Allumettes*.

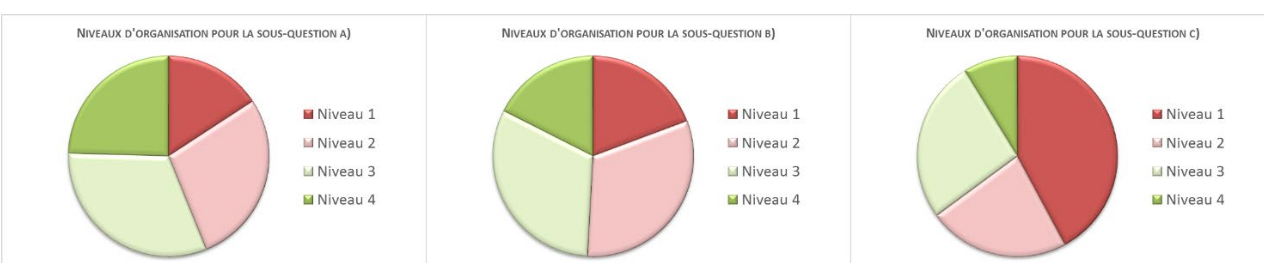
Dans le problème des *Allumettes*, l'organisation des dessins présentés lance les élèves vers la stratégie canonique. Or, dans le cadre de l'*Enseignant*, la « désorganisation » séquentielle des dessins semble, d'une part, forcer les élèves à recourir à d'autres stratégies et registres, et, par conséquent, à leur laisser une liberté d'organisation. Bien qu'ils ont toujours à leur portée la stratégie canonique, ils s'y réfèrent moins et doivent développer leur cadre, d'autant plus qu'ils ont un rôle d'enseignant à jouer.

La position d'enseignant des sujets a probablement amené à un plus grand souci du détail dans la présentation de leur solution : ils sont maintenant les modèles et doivent créer un corrigé, lequel leur sert de référant pour analyser les copies d'Amélie et Maxime. Ainsi, non seulement doivent-ils communiquer clairement aux deux élèves-fictifs une rétroaction, mais ils doivent pour eux-mêmes organiser leurs idées, se créer un modèle, pour analyser les copies données. Il semble donc que la présentation du problème de l'*Enseignant* par des termes désordonnés et la position demandée aux élèves influencent l'organisation des raisonnements.

#### *4.1.3.4 L'organisation et l'esthétisme dans la situation de la Balance*

La figure 44 montre les niveaux d'organisation des productions des sujets dans la situation de la *Balance*. Bien qu'on y note une déclinaison de l'organisation de la sous-question a) à la sous-question c), on peut conclure que les niveaux demeurent élevés.

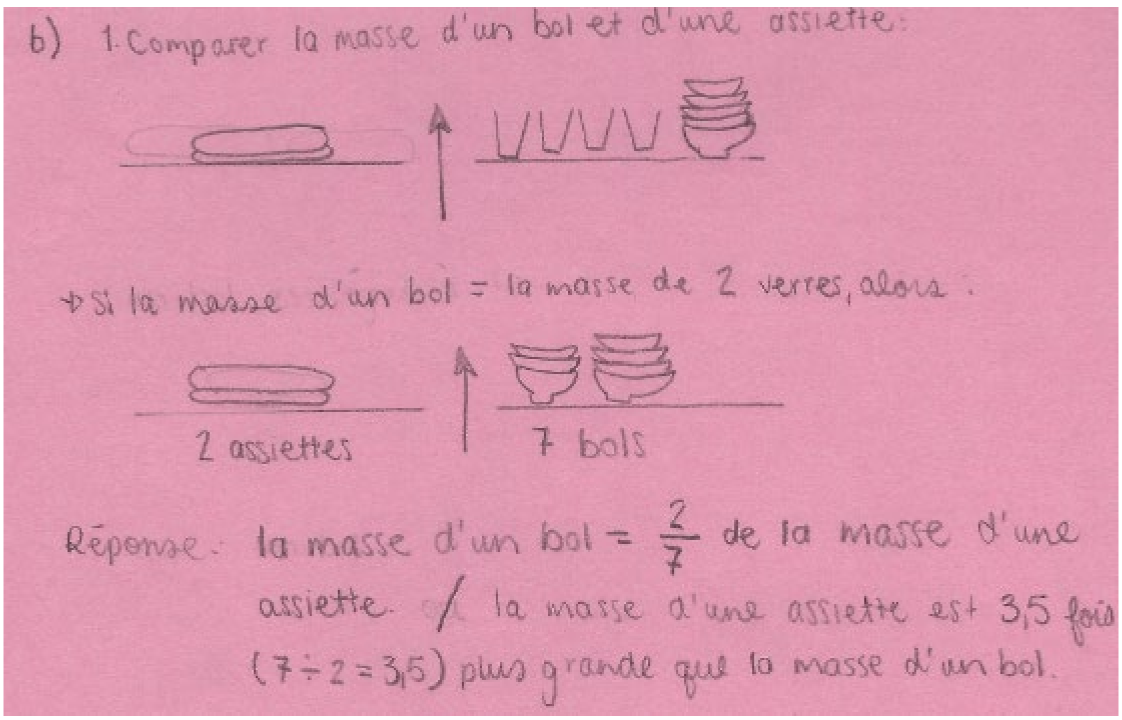
*Figure 44 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation de la Balance*



L'organisation et l'esthétisme dans cette situation semblent intimement liés à l'usage par les sujets de plusieurs registres de représentation. La mobilisation de cette variété de registres étant provoquée (voir à cet effet la **section 4.1.2.1.1**) par la présentation du problème de la *Balance*, sans données numériques, et à partir de trois dessins présentant des équilibres. Par cela, les sujets développent une stratégie plus personnelle qui est mieux argumentée, mais aussi mieux organisée puisqu'ils doivent s'assurer de la compréhension de leur interlocuteur dans la stratégie plus personnelle qu'ils mobilisent.

Ainsi, il appert que l'organisation et l'esthétisme dans cette situation sont influencés par les mêmes valeurs de variables de communication que dans la situation de l'*Enseignant* : on laisse une liberté d'organisation aux sujets, une liberté créée par le choix initial des registres de représentation dans l'énoncé du problème avec peu de mots et des dessins. Les dessins servent aussi de référant aux sujets pour appuyer leur organisation comme en fait foi la copie-type du sujet # 5 du groupe SÉ (figure 45).

*Figure 45 - Copie-type du sujet # 5 du groupe SÉ à la sous-question b) de la situation de la Balance*

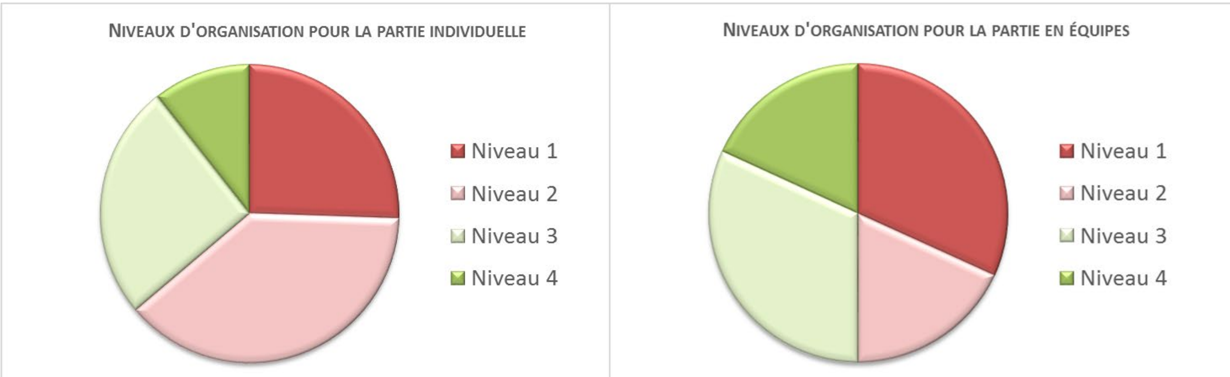



Même si la réponse du sujet # 5 est fausse puisqu'il poursuit son raisonnement à partir d'une déduction erronée issue de la sous-question a), on voit une présentation très organisée, appuyée par des titres, des dessins, une présentation séquencée du raisonnement et une mise en évidence de la réponse.

*4.1.3.5 L'organisation et l'esthétisme dans la situation du Déménagement*

La figure 46 présente les niveaux d'organisation pour la situation du *Déménagement* en comparant la phase individuelle de la phase en équipes.

*Figure 46 - Répartition des niveaux d'organisation pour les parties individuelle et en équipes de la situation du Déménagement*




Si l’effet dyadique influence l’argumentation, il semble également qu’il ait un impact sur l’organisation. Individuellement par contre, les sujets montrent des niveaux élevés d’organisation et d’esthétisme dans leur production individuelle. Ce résultat s’explique par le fait qu’une organisation séquentielle en cinq étapes a été enseignée aux élèves pour résoudre des problèmes algébriques écrits comme témoignent les productions individuelles suivantes des sujets # 2 du groupe R et # 6 du groupe SÉ (figures 47 et 48) :

*Figure 47 - Copie-type du sujet # 2 du groupe R à la situation du Déménagement*

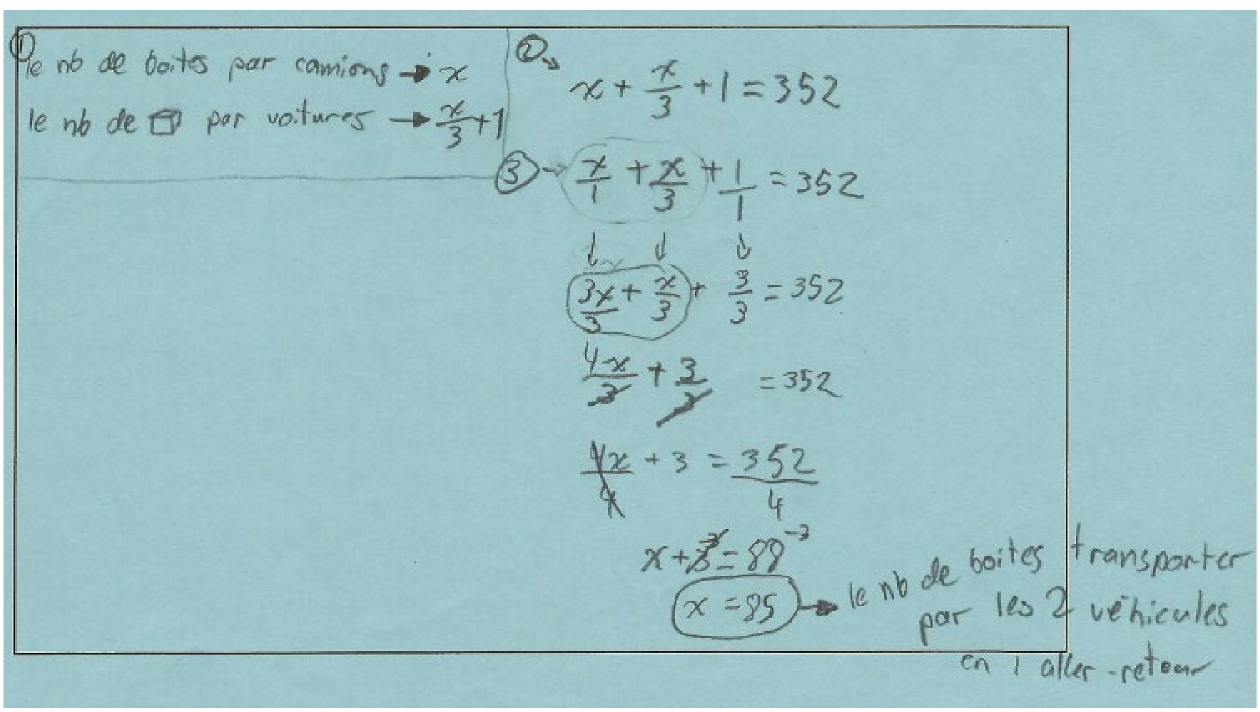
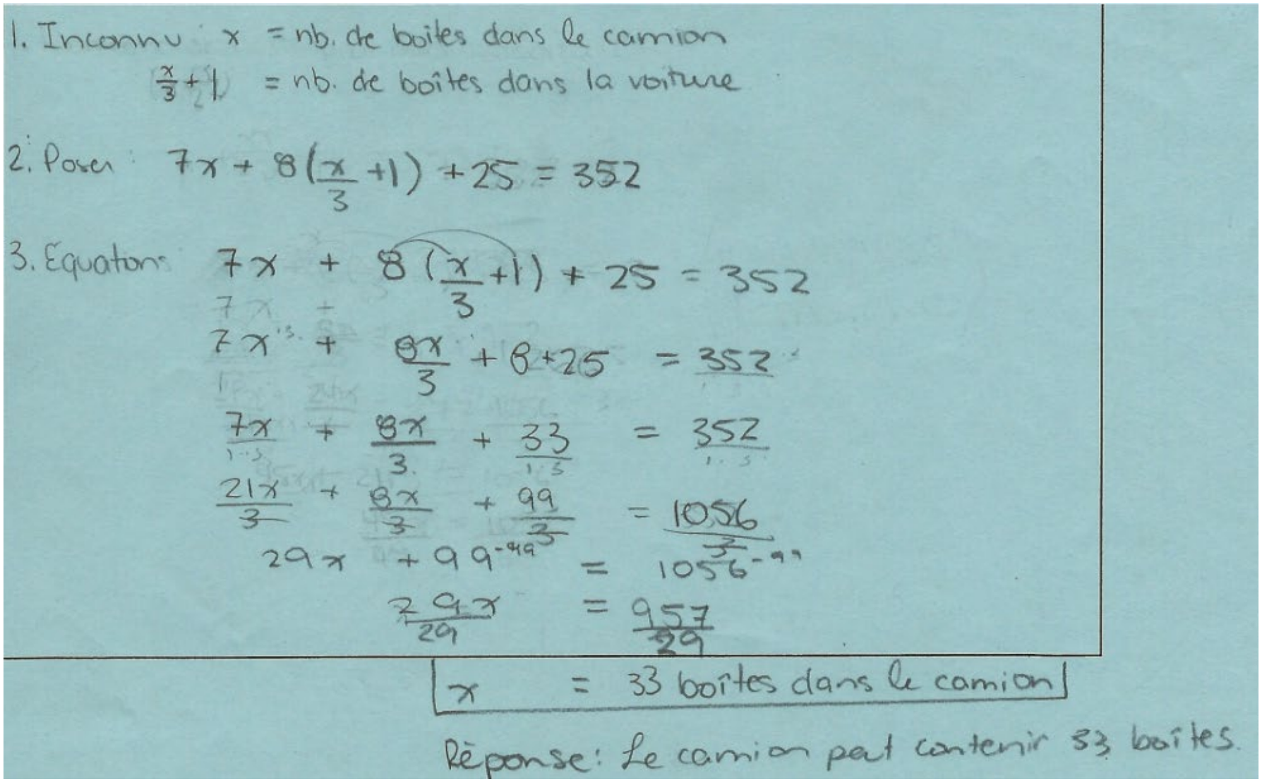


*Figure 48 - Copie-type du sujet # 6 du groupe SÉ à la situation du Déménagement*



1. Inconnu : $x$ = nb. de boites dans le camion

$(\frac{x}{3}+1)$ = nb. de boîtes dans la voiture

2. Poser : $7x + 8(\frac{x}{3}+1) + 25 = 352$

3. Équation : $7x + 8(\frac{x}{3}+1) + 25 = 352$

$7x + \frac{8x}{3} + 8 + 25 = 352$

$\frac{7x}{1 \cdot 3} + \frac{8x}{3} + \frac{33}{1 \cdot 3} = \frac{352}{1 \cdot 3}$

$\frac{21x}{3} + \frac{8x}{3} + \frac{99}{3} = \frac{1056}{3}$

$29x + 99^{-99} = 1056^{-99}$

$\frac{29x}{29} = \frac{957}{29}$

$\boxed{x = 33 \text{ boîtes dans le camion}}$

Réponse : Le camion peut contenir 33 boîtes.

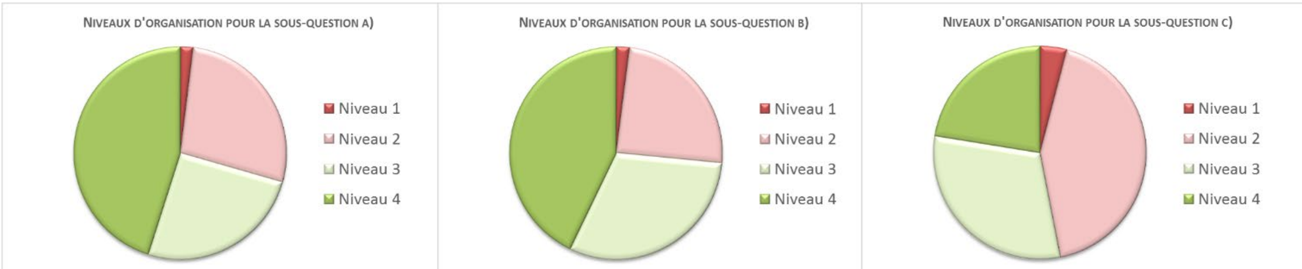
Les deux sujets numérotent les étapes de leur résolution et le sujet # 6 y ajoute même des titres. On reconnaît la méthode de résolution en cinq étapes enseignée, même si la 4$^{e}$ étape (mise en évidence de la réponse) n'est pas explicite (mais bien présente chez les deux sujets) et la 5$^{e}$ (celle appelée « vérification ») est absente des productions.

Dans la présente situation, tout comme dans celle des *Allumettes*, il semble que ce soit l'enseignement d'une méthode séquentielle qui favorise l'organisation des sujets.

#### *4.1.3.6 L'organisation et l'esthétisme dans la situation des Équations*

C'est la situation des *Équations* où les sujets ont sans contredit obtenu les plus hauts niveaux d'organisation et d'esthétisme comme on le constate sur les graphiques suivants (figure 49).

*Figure 49 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation des Équations*




Ce constat n'est pas surprenant d'une part, parce qu'en termes de savoirs mathématiques à mobiliser, les résolutions demandées sont de moindre envergure que les autres situations : les sujets doivent résoudre des équations algébriques sans contexte. Il y a peu d'éléments à décoder (bien sûr, avant de considérer les deux productions des élèves-fictifs[91]) contrairement aux cinq autres situations.

D'autre part, les sujets résolvent les équations avec des méthodes algébriques séquentielles qui ont été apprises: en considérant les priorités des opérations, on regroupe les termes semblables de chaque côté de l'équation, on regroupe les termes constants d'un côté, même chose pour les termes algébriques, etc. Les élèves ont à leur portée une structure de résolution qu'ils appliquent. L'interlocuteur dans la situation peut aussi influencer l'organisation : les sujets reproduisent pour l'enseignante les techniques de résolutions d'équations qu'elle leur a apprises.

Enfin, le moment didactique de passation de la situation vient sans doute aussi influencer l'organisation des sujets. En effet, étant présentée en fin de parcours algébrique, les élèves ont probablement développé une aisance dans le réinvestissement du travail demandé sur la technique. Ils ont aussi reçu quelques rétroactions de la part de leur enseignante sur les méthodes de résolution d'équations algébriques (« *commence par faire ci* », « *laisse les étapes de ta résolution en colonne* », etc.). Ils ont donc un certain degré d'expertise dans ce type de résolution sans contexte et c'est probablement un autre élément qui vient expliquer les hauts niveaux d'organisation.

#### *4.1.3.7 Synthèse des résultats quant aux niveaux d'organisation et de l'esthétisme*

Plusieurs résultats émergent de l'analyse des productions écrites des sujets quant au critère commun lié à l'organisation et à l'esthétisme:

- Les procédés de résolution enseignés : les registres de représentation utilisés dans l'énoncé de certains problèmes des *Allumettes* (dessins présentés en ordre croissant) et du *Déménagement* (problème écrit algébrique) réfèrent implicitement les élèves vers des procédés (souvent séquencées) qu'ils ont appris

[91] Rappelons que la grille d'analyse permet de coder l'organisation des productions des sujets, soit leurs propres réalisations des équations et non leurs prises de position qui viennent par la suite.

pour résoudre des problèmes. Ces procédés influencent les niveaux d'organisation. Dans les *Allumettes*, l'élève utilise une stratégie canonique avec des étapes clairement définies. Dans le *Déménagement*, une « méthode de résolution en cinq étapes » séquence la production écrite de l'élève favorisant ainsi l'organisation de sa démarche.

Les résultats quant aux procédés appris invitent aussi à l'usage de plusieurs registres dans la résolution (table de valeurs; équation algébrique; mots et titres). La résolution du problème appuyée sur plusieurs registres, permet au lecteur de la production de mieux suivre visuellement l'organisation de la démarche.

Dans la situation du *Magicien* toutefois, aucun procédé n'a été enseigné pour résoudre le problème. Le peu de registres à la disposition des élèves pour formuler l'identité algébrique influence l'organisation de la démarche. Par contre, le recours aux opérations arithmétiques dans la sous-question a), si elles sont bien structurées (par une numérotation ou une présentation en colonnes) permet d'avoir une démarche organisée favorisant ainsi de plus hauts niveaux d'organisation. La présentation du truc de magie dans l'énoncé (en courtes phrases placées en colonne) influence positivement les sujets dans l'organisation de leur stratégie à la sous-question b) puisqu'ils s'en servent comme modèle.

- <u>La valeur de variable choisie pour présenter un problème sans données numériques</u> : dans la situation de la *Balance*, on favorise l'organisation puisqu'on invite les élèves à, soit s'appuyer sur les dessins pour organiser leur propre raisonnement ou, soit on les amène à choisir d'autres registres (qu'ils maîtrisent mieux) pour organiser une stratégie personnelle. Ainsi, l'organisation est positivement influencée.
- <u>La valeur de variable choisie de placer l'élève en position « d'élève »:</u> les situations des *Allumettes* et des *Équations* placent les sujets en position d'expliquer une solution qui s'adresse directement à l'enseignante. Des sujets peuvent reproduire alors les techniques enseignées (lesquelles sont souvent titrées et séquencées) pour montrer qu'ils maîtrisent ces méthodes.
- <u>La valeur de variable choisie de placer l'élève en position « d'enseignant »:</u> dans la situation de l'Enseignant, les élèves qui adoptent la posture d'enseignant semblent s'appliquer davantage dans les étapes de leur raisonnement puisque celui-ci leur servira de référant.
- <u>Le moment didactique</u> : la situation des *Équations* laisse penser, qu'étant en fin de parcours d'apprentissage de l'algèbre en 2e secondaire, les sujets sont familiers dans la résolution d'équations puisque la technique apprise est réinvesties plusieurs fois en cours d'apprentissage. Cette technique de résolution en colonne, en laissant des équations intermédiaires, permet une meilleure organisation de la démarche.

#### *4.1.4 Synthèse des résultats à propos de la communication des élèves*

Rappelons tout d'abord la première question à laquelle la recherche tente d'apporter des réponses.

**Q1** : *Les situations de la séquence conçue sollicitent-elles une communication mathématique riche et pertinente de la part des élèves ?*

Cette question est déclinée en sous-questions. Ayant établi que les élèves ont déployé une activité mathématique pertinente dans la réalisation des situations (sous-question Q1.1., voir **section 4.1.1** et **annexe 13**), dans cette synthèse, nous rassemblons les éléments de réponse à la deuxième sous-question, soit :

> ***Q1.2***: *Comment les élèves ont-ils communiqué dans leurs productions mathématiques? Certaines valeurs de variables semblent-elles avoir favorisé la richesse de leur communication?*

Plusieurs valeurs de variables ou facteurs semblent influencer la communication déployée par les élèves dans les situations.

- La non-disponibilité d'une stratégie canonique ou connue pèse sur l'exigence de formulation et demande à l'élève d'enrichir son discours, faute d'implicites partagés :
    - Lorsque l'élève mobilise une stratégie qui ne repose pas sur une technique déjà apprise, c'est-à-dire lorsqu'il crée une stratégie personnelle, il doit expliquer l'ensemble de son raisonnement, pas à pas, par souci pour son interlocuteur, avec lequel, contrairement au cas d'une stratégie classique, il ne partage pas les implicites. Il tente alors de montrer la validité de sa stratégie sans pouvoir recourir à un vocabulaire ou à des stratégies institutionnalisées. Il est invité, par-là, à réfléchir sur son raisonnement et à enrichir son discours pour pouvoir le transmettre.
    - Par contre, il ne faut pas en conclure que les élèves qui mobilisent une technique apprise, restituent nécessairement des savoirs mathématiques « appris par cœur » sans en comprendre le sens. Ils peuvent y voir une économie du discours sans sentir le besoin d'expliquer à nouveau les raisonnements sous-jacents à la technique, et ce, d'autant plus quand l'interlocutrice est l'enseignante qui leur a enseigné cette technique. La situation doit aussi créer le besoin d'expliquer la stratégie. C'est justement ce que l'on a cherché à faire avec l'*Enseignant* en rendant la stratégie canonique moins évidente.
- La position attribuée à l'élève et le jeu sur l'interlocuteur influencent l'argumentation et l'organisation:
    - <u>La position d'élève qui explique par écrit à l'enseignante une stratégie connue ou non</u> :
        - Dans la situation des *Allumettes*, les élèves qui mobilisent la stratégie canonique, sachant qu'ils parlent à leur enseignante, n'expliquent pas beaucoup les raisonnements qu'ils mettent en jeu, entrent moins dans un discours technologique, puisque l'enseignante les comprend. Après tout, c'est elle qui leur a montré la technique et ils ne voient pas la pertinence de tout réexpliquer

puisqu'ils ont un discours partagé avec elle. Et c'est entre autre ce discours, cette terminologie qui a été objet d'enseignement. Le contrat didactique les invite donc à montrer qu'ils ont bien appris.

  - Par contre, dans une situation comme la *Balance* (même position et interlocuteur), aucune technique n'a été apprise pour résoudre ce problème. Les élèves doivent donc développer une façon de formuler à l'enseignante le raisonnement qu'ils ont développé dans l'action. Pour ce faire, ils doivent d'abord reconnaître leur raisonnement, le reconstruire, puis choisir un registre de représentation avec lequel ils pourront le transmettre. On observe donc une influence sur leur argumentaire et leur organisation.

- <u>La position « d'enseignant-explicite » qui explique à des élèves-fictifs</u> favorise une meilleure organisation mais surtout une argumentation plus développée de la stratégie personnelle de l'élève (son référant pour analyser les copies-types). Dans la situation de l'*Enseignant* par exemple, les sujets prennent leur rôle au sérieux. Ils développent leur « corrigé » de manière plus exhaustive et s'engagent dans la formulation de commentaires aux élèves-fictifs. Les élèves semblent percevoir un enjeu dans ce genre de situations et laissent beaucoup d'éléments de communication sur l'argumentation, l'organisation et les savoirs mobilisés par les élèves-fictifs sur les productions. En ce sens, on espère que les élèves-enseignants prennent conscience de l'importance des éléments qu'ils commentent ou à partir desquels ils prennent position et les transfèrent dans leurs productions ultérieures.

- <u>La position « d'enseignant-implicite » qui explique à l'enseignante :</u>

  - Dans la situation des *Équations*, les élèves doivent prendre position sur des solutions d'élèves-fictifs. L'analyse des productions des élèves-fictifs qu'ils doivent alors faire, depuis une position d'enseignant, fait en sorte qu'ils expliquent et argumentent clairement leur position en nommant quelques objets mathématiques (la distributivité, le symbole du périodique, par exemple). Ils prennent toutefois position principalement en faveur du sujet qui arrive à la bonne réponse ou qui reproduit la démarche apprise en classe. L'argumentation de la prise de position destinée à l'enseignante semble être influencée par des effets du contrat didactique.

- <u>La position d'élève qui explique à un coéquipier, puis à un quidam :</u>

  - Dans le *Magicien*, les élèves en équipe, doivent développer un truc de magie pour piéger une victime et expliquer à un quidam pourquoi le truc n'est pas vraiment de la magie. Comparativement au travail seul, le travail dyadique dans le *Magicien* semble avoir poussé les coéquipiers à formuler des trucs de magie plus complexes, mieux organisés et argumentés.

Toutefois, les explications sur le fonctionnement du truc formulées pour un quidam sont difficiles à réaliser, les élèves ne possédant pas les mots ou les outils algébriques pour le faire. Et c'est sans compter, qu'il est difficile de « trouver le truc » sans recourir à l'algèbre laquelle permet facilement de mettre en évidence l'identité.

- Les registres de représentation utilisés dans l'énoncé du problème écrit influencent tant l'argumentation et l'organisation :

    - Le problème de la *Balance* : représentée par des dessins équilibres, avec peu de mots et sans données numériques, force les élèves à développer une stratégie personnelle qu'ils expliquent avec des registres de représentation qu'ils choisissent eux-mêmes. Conséquemment, ils argumentent et organisent davantage leurs raisonnements puisqu'ils manipulent des objets mathématiques avec lesquels ils sont plus à l'aise. Les registres des dessins semblent aussi favoriser les premiers pas des élèves dans la résolution : ils peuvent minimalement faire un travail d'élimination sur la 3$^{e}$ balance.

    - La situation de l'*Enseignant* : par l'usage de deux solutions d'élèves-fictifs qui arrivent à la bonne réponse, la situation de l'*Enseignan*t invite, d'une part, les élèves à décoder ces solutions et à les commenter plus finement. Le regard étant moins porté sur la réponse, ils portent un jugement sur l'argumentation, l'organisation, le formalisme en jeu dans les productions, les savoirs mathématiques mobilisés par les élèves-fictifs et s'éloignent d'une prise de position fondée uniquement sur la réponse adéquate. Le décodage des registres des solutions des élèves-fictifs peut aussi relancer les élèves qui ne savent pas comment aborder le problème dans la recherche de leur stratégie personnelle. Les solutions d'élèves-fictifs semblent aussi enrichir l'argumentation et l'organisation de leur propre solution personnelle, permettant ainsi d'atteindre des niveaux plus élevés pour les deux critères.

      Enfin, puisque la présentation désordonnée des termes de la suite algébrique du problème de l'encadrement éloigne de la stratégie canonique, les élèves développent une stratégie plus personnelle, laquelle est davantage argumentée.

    - La situation du *Magicien* : la présentation en étapes séquencées en colonne des opérations d'un truc de magie offre un exemple et favorise l'organisation de leur propre truc de magie pour la sous-question b).

    - La situation du *Déménagement* : par le repérage sur la copie de l'élève-fictif de « la méthode en cinq étapes » pour la résolution de problèmes algébrique écrits, les élèves réfèrent à une démarche déjà apprise en classe qui leur propose une structure qu'ils reproduisent dans leur résolution personnelle du problème. Par conséquent, les niveaux d'organisation sont plus élevés, notamment parce qu'ils inscrivent les noms ou les numéros des étapes qu'ils suivent.

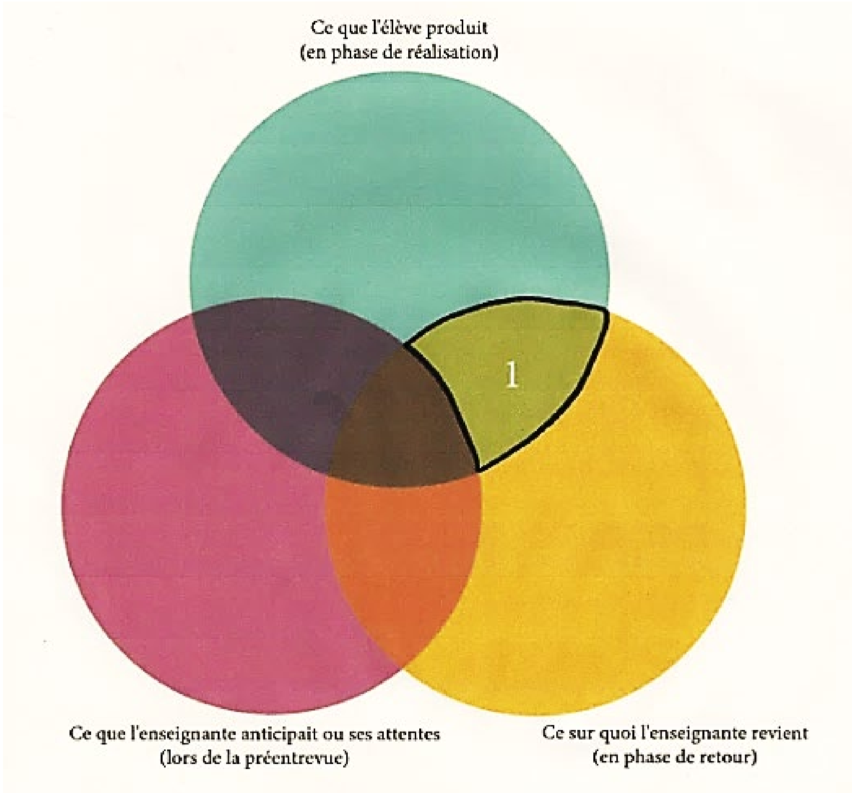
- Les moments didactiques de réalisation des situations influencent l'argumentation et l'organisation :
    - La situation du *Magicien* : si les manipulations arithmétiques des opérations en jeu dans le truc de magie ne sont pas une difficulté en soi pour les élèves, la formulation par écrit de leurs déductions est plus difficile. Le moment didactique de première rencontre avec cette situation laisse les élèves dans une phase de résolution, sans pouvoir dégager et formuler l'identité algébrique puisqu'ils n'ont pas les mots ou le langage algébrique à leur portée.
    - La situation des *Équations* : les élèves étant plus familiers dans la résolution d'équations, puisque la technique apprise est réinvestie plusieurs fois en cours d'apprentissage, ils nomment davantage les objets et propriétés en jeu dans les solutions d'élèves-fictifs présentées (distributivité, opérations inverses, etc.). Par contre, leur prise de position est fortement influencée par la bonne ou la mauvaise réponse (contrairement aux commentaires formulés dans l'*Enseignant*). Par ailleurs, les élèves ont appris une technique de résolution d'équation. Cette technique de résolution en colonne, en laissant des équations intermédiaires, permet une meilleure organisation de leur raisonnement personnel.

### 4.2 Partie 2 : Description de l'exploitation des traces de communication laissées par les élèves faite par l'enseignante lors des retours.

La deuxième partie du chapitre se centre sur les interactions entre l'enseignante et les élèves lors des phases de retours des situations. On cherche à voir si les situations proposées donnent lieu à des interactions qui sont utiles à l'enseignante. Plus spécifiquement, ce ne sont pas toutes les interactions repérées dans l'expérimentation qui font l'objet de l'analyse. L'emphase est mise sur les interactions qui ont « nourri » l'enseignante a posteriori des passations des six situations et qu'elle n'a pas anticipées : *Y a-t-il des éléments de communication laissés par les élèves, à la suite de leurs interactions dans les situations proposées, qui n'avaient pas été anticipés par l'enseignant et qu'il a exploités lors des retours avec les élèves ? Si oui, comment sont-ils exploités? Peut-on dégager des apports didactiques de cette exploitation?*

Schématiquement, les interactions de la zone 1 du diagramme de Venn suivant sont le cœur de la deuxième partie.

*Figure 50 - Schéma des interactions considérées pour répondre à la 2e question de recherche*




La zone 1, sur le précédent schéma, regroupe tous les éléments de communication produits par les élèves (stratégies effectives, questions lors du retour, erreurs ou conceptions erronées qui émergent lors des productions écrites ou lors des interactions en classe, etc.), sur lesquels l'enseignante revient dans la phase de retour et qu'elle n'a pas anticipés. En ce sens, on cherche à voir comment les interactions avec les situations permettent à l'enseignante d'accéder aux raisonnements non anticipés des élèves et, à plus forte raison, de les mettre en valeur à la faveur de l'ensemble des groupes lors des retours. C'est l'intersection entre « ce que l'élève produit en phase de réalisation des situations » et « ce sur quoi l'enseignante revient dans sa phase de retour » en excluant « ce qui avait été anticipé par l'enseignante initialement » qui est analysé dans cette section.

Ainsi, la deuxième partie du chapitre est développée autour des deux thèmes suivants :

- les stratégies non anticipées par l'enseignante, lors de la préentrevue, mais exploitées lors du retour :

  ***Q2.1 :*** *Quels sont les stratégies, les raisonnements, les erreurs ou conceptions erronées et les autres éléments communiqués par les élèves qui font l'objet d'un retour et qui n'avaient pas été anticipés par l'enseignant ?*

- l’espace dévolu aux élèves:

*Q2.2 :* *Est-ce que les retours sur certaines situations ont amené l’enseignant à dévoluer davantage d’espace aux élèves, à les placer davantage en position de recherche plutôt qu’en position d’attente ? Dans l’affirmative, peut-on faire des liens avec des valeurs de variables ?*

Pour chacune des cinq situations qui ont fait l’objet d’un retour, la mise en évidence des éléments nécessaires à l’analyse s’appuie sur les données suivantes:

- les réponses données par l’enseignante aux questions de la préentrevue constituant ainsi les anticipations et attentes de cette dernière en ce qui a trait aux difficultés et aux stratégies des élèves;
- les stratégies mathématiques effectives des élèves à chacune des situations (**annexe 13**);
- les retours filmés de l’enseignante sur les situations pour chacun des groupes (SÉ et R)[92];
- les conduites de communication déployées par les élèves, telle que mises en évidence dans la partie 1;
- les réponses et commentaires de l’enseignante dans son journal de bord recueillis après la passation de chacune des situations.

Rappelons, qu’avant chacun des retours sur une situation, l’enseignante corrige les copies des élèves. Elle a donc accès à l’éventail des stratégies réalisées dans la mesure de l’analyse qu’elle peut en faire compte tenu des différentes contraintes d’enseignement.

Disons d’entrée de jeu que, pour chacune des cinq situations, il y a au moins une stratégie d’élève non anticipée qui a été exploitée par l’enseignante lors du retour. En d’autres termes, la zone 1 n’est vide pour aucune des situations.

### *4.2.1 Les interactions et l’espace dévolu aux élèves dans la situation des Allumettes*

Le tableau 13 ci-après synthétise les attentes et les anticipations de l’enseignante exprimées lors de la préentrevue et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes.

#### *4.2.1.1 L’exploitation de stratégies non anticipées pour faire avancer le savoir*

Dans les deux groupes, l’enseignante exploite des stratégies qu’elle n’a pas anticipées. Dans le groupe SÉ, elle exploite les termes généraux d’une suite non anticipés « 4+3n » et « 4n – (n-1) » alors que dans le groupe R, elle utilise « 4+3n » et « 4n ».

[92] Notons que chacun des retours a aussi été retranscrit intégralement. Les verbatim sont disponibles sur demande.

Dans les deux groupes, l'enseignante revient sur la stratégie inexacte « 4 + 3n »[93] faite par 9 sujets. Cette stratégie donne une piste de départ à l'enseignante pour les deux retours.

Elle fait donc le choix d'amorcer une discussion avec les élèves autour d'une stratégie inexacte si l'on considère la valeur de « n » correspondant au rang du terme dans la suite. Elle travaille ce terme général en cherchant à créer un conflit cognitif chez les élèves qui sont invités à dire si le couple (2e terme, 7 allumettes) vérifie la règle. Par cet essai numérique, elle espère que les élèves invalident la règle puisqu'ils obtiennent un résultat de 10 allumettes en substituant 2 dans la règle « 4+3n ».

Si, lors de la préentrevue, l'enseignante a manifesté le souhait de faire le lien entre le dessin et la découverte d'une règle (« *sans quoi la stratégie est vide de sens* »), la discussion autour des dessins ne semble pas s'opérer de la même manière dans les deux groupes.

*4.2.1.2 Le moment didactique influe sur la position de recherche dans les deux groupes*

**Dans le groupe SÉ**

L'enseignante exprime aux élèves son intention d'explorer plusieurs règles. Ainsi, elle démarre avec le terme général « 4+3n », en inscrivant au tableau « *T=4+3n* », puis demande « *qu'est-ce qui ne marche pas dans ce raisonnement-là vous pensez ?* » en vue de discourir sur le « n » qui ne correspond pas, ici, à la définition habituelle du rang. Un élève lui répond que la règle est bonne[94]. Pour convaincre cet élève du contraire, elle invite le groupe à remplacer la valeur du « n » par « 2 » arrivant ainsi à une valeur de « *T=10* ». Elle relance donc encore une fois le groupe :

14. **ENS** : Qu'est-ce qui ne marche pas dans ce raisonnement-là vous pensez ? É-A?
15. **É-A**: Il faut trouver la règle.
16. **ENS** : Toi, tu as tout de suite deviné que c'était l'avenue peut-être la plus rapide. Mais il y en a qui sont passé pas d'autres chemins quand même pis c'était bon, mais oui, en le faisant avec la règle ça va. Mais lui c'est ça qu'il a fait travailler avec la règle, mais il s'est trompé. Comprends-tu ?
17. **É-B** : Il avait besoin de trouver son terme au rang 0.
18. **ENS** : Il a essayé de trouver son terme au rang 0. Lui dans sa tête la personne qui a écrit ça son terme au rang 0 c'est quoi ?
19. **É** : 4
20. **ENS** : Est-ce que c'est 4 le terme au rang 0 ?
21. **É-Classe** : Non (en cœur)

[93] Rappelons que cette règle repose sur une interprétation qui considère que la valeur du « n » commence au 2e rang ou au premier carré ajouté, en d'autres termes, n=1 au 2e carré. Il est possible d'utiliser ce raisonnement avec la définition habituelle du rang, il faut alors considérer l'ajout de trois allumettes «n – 1» pour obtenir 4 +3(n-1). Ainsi, au 2e dessin (rang 2), on ajoute (2 – 1 = 1 fois) une série de trois allumettes. Cette règle est utilisée par 6 sujets.

[94] La discussion ne s'est pas poursuivie avec cet élève pour savoir si l'enseignante et lui réfèrent au même « *n* ».

*Tableau 13 – Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la situation des Allumettes*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Déroulement du retour**<br>Premier groupe [95] : SÉ | **Déroulement du retour**<br>Deuxième groupe : R |
|---|---|---|
| - L'enseignante croit que les élèves auront recours à une table des valeurs au départ.<br>- Elle espère un transfert du concept de « règle » par les élèves, enseigné quelques semaines auparavant dans un nouveau contexte.<br>- Elle veut voir si la méthode enseignée convient aux élèves : « si elle convient vraiment, tu l'emploies ».<br>- L'enseignante souhaite un réinvestissement des différents modes de représentation vus en début d'année : règle et table de valeurs.<br>- Les sous-questions a) et b) seront mieux réussies.<br><br>- Les élèves auront de la difficulté :<br>  - à faire les étapes inverses en b).<br>  - à utiliser le contexte et le dessin pour appuyer leur raisonnement.<br>  - dans le groupe R, à cibler les concepts et auront besoin d'indices et les encourager.<br><br>- La stratégie idéale serait de faire le lien entre le dessin et la découverte d'une règle « sans quoi la stratégie est vide de sens ».<br>- Groupe SÉ : restera accroché à la stratégie canonique enseignée.<br>- Elle est préoccupée par l'idée qu'uniquement la table de valeurs soit utilisée par les élèves (sans généralisation).<br>- Des élèves algébriserons le problème, mais certains, plus artistes, travailleront sur le dessin.<br>- Elle souhaiterait avoir plusieurs stratégies pour établir des comparaisons et donner plus de sens à l'algèbre. | - L'enseignante projette les dessins des allumettes au TNI et commence l'analyse des dessins avec les élèves.<br>- Elle exprime le souhait d'explorer plusieurs règles avec le groupe.<br>- Elle aborde la règle « erronée » 4 + 3n (en mots au départ, mais revient vite à une règle) et fait un exemple pour montrer qu'elle est fausse.<br>- Les élèves ramènent l'enseignante vers la solution canonique de résolution.<br>- Elle aborde donc sommairement la forme canonique en parlant du terme au rang 0 en comparaison avec la règle fausse 4 + 3n (fausse car le n commence au 2e rang).<br>- Elle aborde ensuite la stratégie basée sur la règle (4n - (n -1)) à partir de la solution d'un élève : 4 x 97 – 96. Elle explique elle-même cette stratégie.<br>- Elle revient plus formellement sur la solution classique.<br>- Elle veut généraliser la règle 4n – (n – 1) à partir du cas spécifique 4 x 97 – 96.<br>- Elle montre l'équivalence entre les deux règles : 3n + 1 et 4n – (n – 1).<br>- Un élève veut proposer sa solution (4 + (n – 1) x 3). L'enseignante s'approche de l'élève et lui dit qu'ils s'en parleront en privé.<br>- Elle conclut en demandant aux élèves lesquels utiliseraient la méthode classique : la plupart lève la main. | - L'enseignante projette les dessins des allumettes au TNI. Elle ne les analyse toutefois pas.<br>- Elle aborde la règle fausse 4 + 3n (en mots au départ, mais formalise ensuite par une règle) et fait un exemple pour montrer qu'elle est fausse.<br>- Un élève présente sa réflexion construite sur le dessin. L'enseignante dit la comprendre, mais demande à la classe si d'autres stratégies existent (de peur que le groupe ne la comprenne pas).<br>- Un élève aborde le concept de terme au rang 0 ce qui lance l'enseignante dans un questionnement autour de la stratégie canonique.<br>- L'enseignante mentionne que des élèves ont vu deux carrés qui se superposent dans le dessin référant ainsi à la règle « 4n ».<br>- À partir de la « règle erronée 4+3n », elle aborde les concepts de taux de variation et de régularité.<br>- L'enseignante tente d'aborder la méthode canonique avec les élèves en construisant une table des valeurs, ce qui se révèle difficile.<br>- Elle questionne les élèves à savoir pourquoi la règle 4 + 3n n'est pas bonne. Elle fait le lien avec le terme au rang 0.<br>- L'enseignante conclut en disant que plusieurs ont fait d'autres stratégies (sans en parler), mais que la plupart utilisent une table des valeurs en ayant toutefois de la difficulté à trouver le terme au rang 0. |

[95] Nous référant au **tableau 8,** nous indiquerons quel groupe a réalisé la situation en premier : cette première passation ayant pu influencer la deuxième.

Dans l'échange précédent, les élèves semblent diriger l'enseignante vers la stratégie canonique. Or, l'enseignante sait que 21 élèves ont fait la stratégie canonique. Elle cherche tout de même à faire progresser les élèves dans le temps didactique en intégrant dans le retour des stratégies hors du commun construites à partir de raisonnements sur les dessins, dont notamment la stratégie inexacte « 4+3n ». On la sent toutefois tiraillée par le fait de relancer les élèves, les diriger ailleurs sur une autre stratégie, ou bien suivre le raisonnement canonique qu'ils proposent.

Même si l'enseignante avait anticipé que les élèves resteraient « accrochés » à la stratégie canonique, elle ne semble pas avoir prévu le peu d'intérêt suscité par les autres stratégies qu'elle cherche à mettre de l'avant. L'enseignante tente de donner de l'espace aux élèves, mais ces derniers le refusent : ils veulent mobiliser la technique apprise.

L'enseignante insiste sur une stratégie non anticipée repérée sur une copie d'élève : 4 x 97 – 96. Bien qu'elle lance une question aux élèves (« *est-ce que ça marche ?* »), elle répond à sa propre question en expliquant que ce calcul repose sur la règle 4n – (n – 1).  La présentation ostensive de cette stratégie est probablement justifiée par le fait qu'elle sent qu'une bonne partie des élèves ne souhaitent pas pousser plus loin la réflexion puisqu'ils possèdent déjà une technique. Les sujets du groupe SÉ semblent interrompre la position de recherche dans laquelle l'enseignante désire les plonger.

L'enseignante sollicite même le sujet qui a réalisé la stratégie sur la règle 4n – (n – 1) et celui-ci est surpris de l'avoir faite : Enseignante : « *M-A, tu l'avais fait toi…* », M-A : « *Ah oui ?* ». À ce moment l'enseignante offre un espace didactique (*topogénèse*) au sujet pour qu'il explique sa solution. Or, ce dernier ne semble plus se rappeler avoir procédé ainsi. C'est à croire que l'élève qui a fait cette stratégie se laisse convaincre par la forme canonique présentée par ses camarades au point d'en oublier sa propre stratégie.

Si l'enseignante souhaite explorer d'autres stratégies, les élèves, eux, semblent vouloir aller vers l'algorithme enseigné. Le moment didactique de la situation qui, pour la plupart des élèves, en est un de travail sur une technique vient colorer le retour de l'enseignante. Malgré qu'elle cherche, à partir de deux stratégies non anticipées, à placer les élèves en position de recherche, ceux-ci n'en voient pas l'intérêt puisqu'ils disposent déjà d'un outil de résolution performant. Les savoirs en jeu dans cette situation sont probablement obsolètes (Sensevy, 1998; Giroux et René de Cotret; 2001) plaçant ainsi une majorité d'élèves dans une position d'attente.

L'enseignante insiste pour relancer les élèves en position de recherche et vient, pour ce faire, changer le type de tâches à partir de la situation initiale. En effet, la tâche initiale est de « formuler le terme général d'une suite ». Pour modifier la tâche, elle change l'objet mathématique et le genre de tâche pour inviter les élèves à « comparer algébriquement deux termes généraux ».  Pour relancer le temps didactique, elle profite donc des deux règles à sa disposition (« 3n+1 » et « 4n – (n – 1) ») pour créer une discussion visant à montrer leur équivalence algébrique et espérant ainsi proposer un nouveau défi aux élèves. Elle n'avait pas anticipé comparer algébriquement les deux règles. Or, l'hypothèse soulevée est qu'elle souhaite introduire de nouveaux savoirs (ou des savoirs moins maîtrisés) parce que le groupe semble lui dire implicitement d'aller plus vite. En changeant le type de tâche, l'enseignante propose de nouveaux savoirs aux élèves pour les éloigner des savoirs connus. Les élèves doivent donc en penser de nouveaux (Giroux et René de Cotret, 2001) pour être en position de dévolution. Par contre, pour montrer cette équivalence, elle réalise elle-même la présentation des étapes de résolution algébrique offrant ainsi peu d'espace aux élèves.

**Dans le groupe R**

L'enseignante démarre par la même règle non anticipée « 4+3n ». Elle prend plus de temps pour interagir avec les élèves à partir des dessins comme en fait foi l'extrait suivant :

6. **Élève 1** : Ben, c'est parce qu'au début oui t'as 4 et après t'as toujours + 3, +3, <u>mais il ne faut pas oublier le 1 que tu utilises pour faire le 1er carré</u>.
7. **Autre élève** : Ben non, c'est bon….
8. **ENS** : Je comprends ce que tu veux dire, mais je vais continuer, ça du bon sens ce que tu dis (<u>un peu incertaine</u>), mais je vais continuer de prendre des réponses parce qu'il y en a peut-être qui ne verront pas le lien avec lui (elle pointe 4+3n)
9. **Élève 2** : c'est parce que nous avons oublié le <u>terme au rang 0</u>.
10. **ENS** : Voilà, c'est bien dit aussi. On a oublié le rang 0. On va commencer par la vérifier. Mon 1er dessin c'est quel rang ?
11. **Élèves** : rang 1
12. **ENS** : Rang 1, premier dessin, donc dans ma suite de dessins, c'est mon dessin 1, donc n est égal à 1. Donc quand n = 1, il y a combien d'allumettes ?
13. **Élèves** : 4
14. **ENS** : 4 allumettes. Dans mon rang, n = 2, il y en a 7…
15. **Élèves** : 7
16. **Un élève timidement** : 8
17. **Élèves** : répètent en cœur 7
18. **ENS** : Qui a dit 8? Non, mais il y en a qui ont dit 8… X, c'est vrai au début tu as dit cela et après je t'ai demandé de recompter tu t'en rappelles ? <u>Il y en a plusieurs qui ont vu deux carrées et qui se sont dit qu'il y en a le double</u>. Mais il n'y a pas vraiment le double, vous remarquez là, parce qu'il y a une de moins, parce qu'ils qui sont collés. Et donc quand n = 3, il y en a ….?
19. **Élèves** : 10

Dans cet extrait, l'élève 1 semble construire un raisonnement à partir du dessin. Il n'a pas la même définition du « n » que l'enseignante. Celle-ci détourne volontairement la discussion qui démarre sur le dessin par crainte de perdre de l'attention du groupe : elle voit probablement arriver l'explication de deux « n » différents et ne souhaite pas créer de la confusion en expliquant la différence.

À la ligne 18, elle profite également de la réponse erronée d'un élève (8 allumettes) au deuxième dessin pour expliquer une erreur repérée dans les corrections des copies, laquelle est fondée sur la règle « 4n », également une stratégie non anticipée. Elle explique cette erreur à partir du dessin en mentionnant que des allumettes se superposent.

Mais l'enseignante a des attentes à l'égard du type de tâches qu'elle souhaite voir mobiliser par les élèves. Tel que mentionné dans la préentrevue, elle espère un transfert du concept de « règle[96] » enseigné quelques semaines auparavant dans un nouveau contexte. Or, seulement 8 sujets ont utilisé la stratégie canonique dans le groupe R. Dans la suite de l'échange, c'est l'enseignante dirige le retour vers la stratégie canonique.

27. **ENS** : Donc, on revient… T est égal à 4 + 3n. Est-ce que c'est vrai que quand n = 2, on a 10 allumettes ?
28. **Élèves** : Non
29. **ENS** : Il y en a 7. Qu'est ce qui se passe ? Qu'est-ce qui se répète tout le temps ?
30. **Élèves** : Silence
31. **ENS** : <u>C'est quoi la régularité ou le taux de variation</u> ou ce qui est toujours la multiplication pour chaque rang, par quoi on multiplie. Élève 1?
32. **Élève 1**: inaudible
33. **ENS** : La majorité vous l'avez trouvé, là, le bond, par combien c'est multiplié à chaque saut (elle attend). C'est multiplié par combien à chaque saut ?
34. **Élève 2** : 3n
35. **ENS** : <u>Oui, c'est 3n</u>. Ceux qui l'ont fait et il y en a plusieurs qui ont fait par table des valeurs (elle dessine une table des valeurs au TBI). À 1, j'en ai 4, à 2, j'en ai 7, à 3, j'en ai 10. Donc, c'est combien la régularité (<u>en pointant avec son crayon le saut entre chaque valeur</u>).

On observe effet Topaze à la ligne 31: l'enseignante cherche à faire dire la réponse et insuffle aux élèves des éléments de la stratégie canonique, soit la régularité (« *qu'est-ce qui se répète tout le temps ?* » et utilise l'écriture « *T*=... »).

L'attente de l'enseignante est que les élèves soient en mesure de dégager et formuler le terme général d'une suite à l'aide du discours algébrique et non pas seulement en mots avec les dessins. Elle ne change pas l'objet de la tâche (trouver le terme général d'une suite), comme dans le groupe SÉ, mais insiste sur un genre de tâche avec une exigence de communication supplémentaire (généraliser avec le discours algébrique).

Conséquemment, l'enseignante prend beaucoup de temps à attendre les explications des termes (taux de variation; rang; terme au rang 0) liés à la stratégie canonique ce qui a pour effet de ralentir la progression du savoir : la stratégie sur laquelle reposent ces termes semble ne pas avoir été comprise par une majorité d'élèves. Or, l'enseignante accorde de l'importance à cette stratégie qui vient mobiliser des savoirs mathématiques algébriques enseignés récemment et qu'elle souhaite réinvestir.

Dans le groupe R, tout avancement vers la stratégie canonique semble laborieux, mais essentiel pour l'enseignante. Dans ce groupe, le moment didactique de la situation pour une majorité d'élèves ne semble pas être du même ordre que dans le groupe SÉ. Les élèves du groupe R semblent être dans un moment didactique d'émergence d'une technologie avec la stratégie canonique comparativement aux élèves du groupe SÉ qui réinvestissent cette stratégie.

[96] Référant à la stratégie canonique.

Comme le précise Mercier (2001), la « mise en temps » du savoir est sans doute la difficulté la plus importante à résoudre pour qui veut mettre en place un enseignement. L'enseignant doit relancer le temps didactique en introduisant du « nouveau ». Mais les éléments nouveaux doivent aussi être dans un langage à la portée des élèves. Dans le groupe R, la plupart des termes liés à la stratégie canonique enseignée ne semblent pas avoir de sens pour les élèves ce qui pousse l'enseignante à montrer ce qu'il faut faire, à être plus ostensive, et même à donner une technique pour trouver le terme au rang 0 comme le montre l'extrait suivant :

41. **ENS** : Donc, si on le dessine autrement. Si on se dit qu'il y en a toujours trois des allumettes par dessin. Au rang 1, on a trois (elle rature les trois allumettes qui forment un « C »), au rang 2, on aura trois fois deux (elle rature encore), au rang 3, on aura trois fois trois, …Et qu'est-ce qui faut toujours que j'ajoute pour compléter ma suite ?
42. **Élèves** : 1
43. **ENS** : Le plus 1 pour venir compléter la suite. Donc, <u>ma vraie règle</u> (elle se reprend)…ok…<u>il y en a quelques-unes</u>, il y a quelques chemins par lesquels on peut passer, mais disons que la majorité ont trouvé T =... À chaque dessin, on va multiplier par trois le rang et on va ajouter 1 pour compléter le nombre d'allumettes. On va la vérifier celle-là. Si n = 3, trois fois trois 9 + 1, 10. Pour 97 maintenant ? Trois fois 97 ? Trois fois 97 ?
44. **Élève** : 291
45. **ENS** : À un autre élève qui avait donné une réponse inaudible : tu étais proche, mais c'est 291… 291 + 1, 292 allumettes. Ok, et pour réussir à faire le b), il fallait faire le chemin inverse 46 – « l'allumette qui bouche le tout », 45, et divisé par les trois à chaque bond, ça va donc nous donner 15. Donc, on fait le chemin inverse, plus 1 on fait moins 1, fois trois on divise par trois, ça va nous le 15e rang pour 46 allumettes. Donc, ce qui ne fonctionnait pas avec celle-ci qui est sortie vraiment souvent (elle revient sur la règle 4 + 3n (en l'entourant). <u>Pourquoi elle n'était pas bonne</u> ? C'est comme si, on avait pris les 4 allumettes comme étant celles au terme de rang 0 comme si la régularité elle ne commençait pas à se rang là alors qu'elle commence là. Donc, les trois premiers qui sont dans le 4, il y a juste le 1 qui est calculé ici en surplus. Ok. Donc, au terme de rang 0, on aurait eu juste une allumette.
    Est-ce que ça va pour tout le monde (incertaine) ? <u>C'est sûr qu'il y en a qui ont inventé des nouvelles façons d'aller trouver la règle, très intéressantes, mais la majorité ont essayé de faire la table des valeurs, ont trouvé le taux de variation, mais ce qui a été le plus difficile</u>, <u>c'est de trouver le terme au rang 0</u>, c'est là qu'on dirait que ça a bloqué. Donc, comment on fait pour le trouver le terme au rang 0, on part du terme qu'on a au rang 1 et on enlève la régularité, on enlève le taux de variation. C'est toujours moins trois, moins trois, ça peut être moins trois aussi pour celui-ci et on va arriver à notre 1 qui est notre terme au rang 0. Facile hein ?

Dans cet extrait, c'est l'enseignante qui prend le contrôle, pressée par le temps, les élèves étant en attente de recevoir la technique déjà enseignée. D'ailleurs, plus le temps presse l'enseignement, plus les élèves manquent à la fois d'espace et de temps pour approfondir leur stratégie (Giroux et René de Cotret, 2001). C'est probablement pour cette raison que l'enseignante souhaite amener les élèves à s'éloigner des essais-erreurs (faits par certains) : par souci d'efficacité, pour gagner du temps. L'enseignante a le besoin que les élèves puissent généraliser pour éviter de recourir à des essais comme elle l'écrit dans son journal de bord : « *Certains ont bien algébrisé leur raisonnement. On voit que l'idée de trouver une règle commence à être un automatisme pour un grand nombre d'élèves. Ils semblent remarquer que l'essai-erreur a ses limites. Parfois, ils m'expliquent leur raisonnement qu'en mots, mais cela est juste et bien dit même s'il n'y a pas de variable écrite* ». Elle propose également dans son journal de bord de demander aux élèves de trouver le nombre d'allumettes dans le 423e dessin de manière à s'assurer que les élèves s'éloignent de la stratégie d'essais-erreurs.

L'enseignante montre de l'ouverture à un autre registre de communication que le recours à l'algèbre pour appuyer le raisonnement. Il s'agit d'un apport didactique de l'exploitation de la situation des *Allumettes*. L'enseignante semble avoir appris de son expérience des retours différents avec ses groupes. Elle réalise l'importance de considérer les stratégies qui sortent de l'ordinaire. Cela était d'ailleurs son souhait en démarrant avec la règle « 4+3n ». L'enseignante mentionne cette ouverture aux autres stratégies dans son journal de bord (écrit après la phase de retour) : « *Le fait que certains élèves arrivent à trouver la réponse en ne passant pas par la table de valeurs et la méthode enseignées pour trouver la règle m'a permis de réaliser que je devrais m'attarder à ces façons de penser davantage dans le futur. Je pourrais par la suite faire un lien entre les différentes règles trouvées en montrant qu'en bout de ligne, elles sont des expressions équivalentes* ». Elle va d'ailleurs plus loin en écrivant qu'il « *aurait pu être intéressant de faire un partage [des stratégies] afin que les élèves puissent juger des règles produites par leurs camarades* ».

Enfin, comme autre apport de l'exploitation de cette situation, l'enseignante remarque « *que peu d'élèves effectuent une vérification de leur règle. J'aimerais développer chez eux cette habitude* ». Elle montre par cet extrait de son journal de bord la nécessité de faire un travail syntaxique avec les élèves.

#### *4.2.2 Les interactions et l'espace dévolu aux élèves dans la situation du Magicien*

Dans l'analyse a priori, il était anticipé que la situation du *Magicien* incite les élèves à formuler davantage en mots le truc de magie (une identité algébrique) puisqu'ils ne maîtrisent pas encore le langage algébrique qui aurait permis de formuler efficacement le truc. N'ayant pas d'outils d'explications efficaces, nous croyions que les élèves expliqueront en mots et que, par conséquent, l'accès aux raisonnements serait facilité. Ce n'est pas ce qui s'est passé, le problème du *Magicien* est difficile puisque les élèves n'ont pas les connaissances mathématiques pour formuler ce qu'ils dégagent.

Les tableaux 14 (sous-question a)) et 15 (sous-question b)) aux pages suivantes présentent les attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des retours. Dans le *Magicien*, c'est avec le groupe R que la première phase de retour a lieu.

##### *4.2.2.1 Le moment de première rencontre des élèves avec le type de tâche appelle à l'usage de l'algèbre*

Les élèves n'ont pas les savoirs mathématiques qui leur permettent de formuler l'identité algébrique du truc de magie ce qui peut créer le besoin pour eux d'avoir un outil de communication plus performant en l'algèbre. L'enseignante le constate dans son journal de bord : « *L'intérêt des élèves était palpable dès la fin de la lecture [de l'énoncé du problème]. Ils voulaient trouver le truc. Ils se sont rapidement mis en action, mais ils ont été confrontés à leur manque de connaissances pour réussir à élaborer une solution. J'aurais pensé que, même avant d'avoir vu le chapitre 13, ils se débrouilleraient mieux dans cette tâche. J'ai vu que non.*».

Dans les deux groupes, l'enseignante note que la stratégie algébrique n'émerge pas et décide de l'aborder. Si l'enseignante exploite sommairement les stratégies effectives (essais multiples et l'allusion à la généralisation de certains élèves) des élèves dans le groupe R, elle entre plus directement dans la formalisation du truc de magie avec le groupe SÉ. Voyant que le discours algébrique n'a pas émergé dans les productions écrites des élèves, elle l'introduit. Elle a une responsabilité de « débloquer » les élèves et d'arriver plus rapidement à la généralisation du truc. D'ailleurs, elle explique dans son journal de bord: « *J'aurais avancé davantage si les élèves avaient algébrisé dès le départ plutôt que de remplacer par divers nombres. Cette démarche ne menait à rien (ou presque) et prenait beaucoup de temps. Peut-être aurait-il été intéressant de donner une piste vers l'algèbre après plusieurs minutes d'essais-erreurs ?* ».

Le fait de les placer devant une tâche si difficile sans le langage algébrique appelle le recours à l'algèbre. L'enseignante, par les deux retours, répond à cet appel et enseigne une stratégie algébrique pour formuler le truc de magie en introduisant la variable.

Pour pouvoir poursuivre leur interaction avec le milieu (Brousseau, 1998), l'enseignante injecte la formulation du truc de magie par l'introduction de la variable « x » pour permettent aux élèves de poursuivre leurs interactions (ici collectives) avec le milieu.

L'un des apports du problème du *Magicien* pour l'élève est de créer le moment de première rencontre avec l'outil algébrique, un outil performant qui permettra d'avancer en construisant de nouvelles connaissances. Pour l'enseignante, c'est un levier pour pouvoir enseigner l'algèbre et cet enseignement prendra tout son sens puisque les élèves attendent enfin de savoir comment formuler le truc de magie. Elle l'a d'ailleurs explicitement écrit dans son journal de bord. Cette situation lui a permis de montrer aux élèves l'utilité du discours algébrique : « *Je la ferais [la situation] après avoir vu le chapitre de l'algèbre. En effet, cette situation a été présentée avant le chapitre 13 qui traite de la méthode de résolution algébrique ce qui m'a permis de l'utiliser pour renforcer l'utilité de l'algèbre* ».

Enfin, comme autre apport pour l'enseignante d'exploiter cette situation, elle remarque « *qu'au niveau du respect des règles et des conventions propres au langage mathématique, cette situation m'a permis de m'apercevoir que le concept d'égalité était à revoir. Beaucoup d'élèves écrivaient la chaîne d'opérations en mettant des « = » après chaque opération (ex : 6 + 10 = 16/2 = 8 – 4 = 2)* ». Ainsi, les moments d'essais numériques des élèves dans la sous-question a) lui ont tout de même permis de voir que des éléments du langage mathématique sont à travailler de même que le sens de l'égalité. Cela rejoint un élément que nous avions anticipé dans l'analyse a priori (voir à cet effet la **note de bas de page 55**).

*Tableau 14 - Attentes et anticipations de l’enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la sous-question a) du Magicien*

| **Attentes/anticipations de l’enseignante** | **Déroulement du retour**<br>Premier groupe: R | **Déroulement du retour**<br>Deuxième groupe : SÉ |
|---|---|---|
| - L’enseignante est curieuse de voir les stratégies qui émergeront.<br>- L’enseignante croit que seule la stratégie algébrique peut mener à la résolution du problème.<br>- Elle trouve la situation limitée en termes de stratégies.<br>- Elle croit que les élèves utiliseront la « boîte vide » pour représenter la variable.<br>- Elle croit que les élèves auront de la difficulté à manipuler les expressions algébriques.<br>- Elle croit aussi que les explications en mots pourraient être présentes. | - L’enseignante relit le problème aux élèves en leur disant que dans la réalisation, ils se sont lancés dans une série de vérifications à l’aide de calculs.<br>- Elle précise que le dernier cours des élèves ont essayé avec 0, avec 1, avec 1000 et même avec 1 million (en blaguant toutefois avec ce dernier nombre : personne ne l’a essayé).<br>- L’enseignante tente de généraliser une solution en introduisant la variable « x » pour représenter le nombre choisi.<br>- Elle construit avec eux l’expression qui représente les étapes que le magicien a demandées de faire.<br>- L’enseignante procède ensuite à la simplification de l’expression algébrique créée avec la classe en questionnant les élèves.<br>- L’enseignante conclut la simplification en montrant que le « x » s’annule dans le truc de magie : x – 8 – x.<br>- L’enseignante fait un exemple avec le nombre 1000 (expérience cruciale) avec les élèves.<br>- L’enseignante mentionne aux élèves qu’on pouvait faire le truc avec plusieurs nombres (essais multiples), mais que l’algèbre permettait de généraliser.<br>- Elle mentionne que des élèves du groupe ont vu que « les opérations doivent s'annuler ». | - Dès le départ, l’enseignante campe la stratégie de résolution algébrique en précisant que le nombre cherché sera « x ».<br>- L’enseignante questionne les élèves sur les opérations liées aux manipulations des expressions algébriques. Elle construit avec eux l’expression qui représente les étapes que le magicien a demandées de faire.<br>- L’enseignante procède ensuite à la simplification de l’expression algébrique créée avec la classe en questionnant les élèves.<br>- À la fin de la simplification, les élèves ne semblent pas avoir saisi que l’expression finale simplifiée généralise le truc de magie. L’enseignante fait rapidement allusion aux essais avec 0 et 1000. |

*Tableau 15 - Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la sous-question b) du Magicien*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Déroulement du retour**<br>Premier groupe: R | **Déroulement du retour**<br>Deuxième groupe : SÉ |
|---|---|---|
| - L'enseignante est curieuse de voir les stratégies qui émergeront.<br>- L'enseignante croit que seule la stratégie algébrique peut mener à la résolution du problème.<br>- Elle trouve la situation limitée en termes de stratégies.<br>- Elle croit que les élèves auront de la difficulté à manipuler les expressions algébriques.<br>- Selon elle, peut-être que les explications en mots prendront une place plus importante sans algébriser le problème. | - L'enseignante amorce maintenant la découverte d'un truc de magie en partant de l'expression : x + 20 – x. Elle construit, en questionnant les élèves, à rebours une identité algébrique.<br>- L'enseignante interrompt la recherche du truc avec les élèves et s'inquiète de ne pas avoir le temps de faire l'autre situation.<br>- L'enseignante demande aux élèves si certains ont réussi à faire un tour de magie. Elle mentionne que certains ont réussi à faire des opérations qui s'annulaient, par exemple (t'ajoute 20, t'enlève 20, t'ajoute 20, t'enlève 20, t'ajoute 20, t'enlève le nombre). Elle dit que l'idée « d'annuler » y est, mais que pour la magie : personne n'est emberlificoté par ce truc.<br>- Elle poursuit la recherche du truc de magie via les opérations inverses.<br>- Elle mentionne aux élèves qu'il existe une multitude de trucs, mais qu'elle a gardé le même modèle que la question a) pour faire son truc.<br>- Elle conclut en mentionnant que plus les élèves seront à l'aise avec la manipulation d'opérations algébriques, plus ils pourront faire des trucs complexes. | - L'enseignante amorce maintenant la découverte d'un truc de magie en partant de l'expression : x + 20 – x. Elle construit, en questionnant les élèves, les étapes inverses pour garder l'expression équivalente.<br>- L'enseignante omet, dans ses opérations inverses, le « + 10 ». Elle corrige son erreur.<br>- L'enseignante formule en mots son truc algébrique.<br>- L'enseignante mentionne, sans plus, que certains élèves ont fait des trucs où ils ont additionné et soustrait un nombre : additionne 20, soustrais 20, additionne 20, etc.<br>- Elle fait aussi allusion à un élève qui aurait fait le truc : « fois deux, divisé par deux, fois deux, divisé par deux, etc. »<br>- Elle mentionne que les trucs repérés n'étaient pas bien « camouflés ». |

### *4.2.3 Les interactions et l'espace dévolu aux élèves dans la situation de l'Enseignant*

Cette fois-ci, c'est le groupe SÉ avec qui le premier retour a eu lieu. Plusieurs choix de valeurs de variables didactiques dans la situation amènent une communication riche.

#### *4.2.3.1 Proposer des solutions d'élèves-fictifs non-canoniques: plusieurs apports pour l'enseignante*

Les solutions des deux élèves-fictifs, volontairement imparfaites, non-canoniques et qui présentent toutes deux des productions qui arrivent au bon résultat sont des leviers intéressants pour le travail de l'enseignante.

Tout d'abord, ces solutions offrent une possibilité de confronter des raisonnements de deux élèves-fictifs et de travailler la validation avec le groupe-classe. En effet, il serait étonnant que, devant les deux solutions proposées, l'enseignante maintienne les élèves en position d'attente et propose une toute autre stratégie sans considérer les solutions qu'elle a sous la main. Les deux solutions d'élèves-fictifs placent les élèves en position de recherche. L'enseignante interagit avec les élèves sur les solutions proposées, forçant le regard collectif sur les raisonnements dont l'un est construit à partir du périmètre et l'autre à partir de l'aire pour trouver un terme général d'une suite désordonnée. En considérant les solutions d'élèves-fictifs, elle dévolue étroitement un espace didactique aux élèves puisqu'ils sont appelés à prendre position sur la meilleure stratégie. Dans les deux retours observés, l'enseignante place les élèves en phase de validation en ouvrant les échanges sur chacune des solutions. Pour valider les raisonnements en jeu, les élèves doivent alors se référer à leurs connaissances pour développer leur argumentaire, lequel peut porter sur la validité sémantique (la référence à ces messages), syntaxique (les messages et leurs descriptions) ou pragmatique (l'échange des assertions entre les élèves de la classe par exemple) (Brousseau, 1998).

Les solutions-fictives permettent également un retour sur des savoirs ponctuels mobilisés par les élèves-fictifs au profit de la classe. Au-delà de la réponse vraie, les raisonnements sont plus finement analysés par les élèves. Conséquemment, l'enseignante peut aller plus loin, faire une analyse plus fine des productions proposées et interagit sur des savoirs mathématiques en jeu et sur la qualité du discours écrit des productions.

Lors des retours, l'enseignante manifeste notamment sa surprise quant à l'absence de la stratégie canonique[97] et questionne les élèves à ce sujet: « *J'aurais pensé que la majorité vous seriez lancés dans la table des valeurs. Quelques-uns seulement l'ont fait. Pourquoi ?* ». Dans le groupe SÉ, elle demande aux élèves : *« Est-ce que c'est parce que les dessins n'étaient pas dans le bon ordre que vous avez été moins portés à faire cela ? Comme les allumettes, ça grandissait de dessin en dessin ? Est-ce que c'est ça qui s'est passé ? ».*

[97] Rappelons que les dessins sont volontairement placés dans le désordre de manière à éloigner les élèves de la stratégie canonique.

Les élèves ne donnent pas de réponse claire aux interrogations soulevées. L'un des élèves mentionne simplement ne pas y avoir pensé. L'enseignante précise qu'il n'est toutefois pas nécessaire d'avoir des dessins placés dans le bon ordre au départ et qu'il est possible de les placer soi-même du plus petit au plus grand dans une table de valeurs. Cette situation permet donc une première occasion pour l'enseignante d'aborder à nouveau la stratégie canonique, mais elle recentre ensuite son retour principalement sur le formalisme en jeu dans la solution de Maxime. À titre d'exemple, l'échange suivant extrait du groupe SÉ permet de voir cela, mais aussi de constater qu'un élève semble avoir adopté sa posture d'enseignant :

> 22. **ENS :** Dans la solution de Maxime, le raisonnement n'est pas fait tout-à-fait de notre façon, mais il a trouvé la règle générale… <u>Il n'a pas marqué le « x » comme tel, mais il réfléchit quand même</u>. Il fait les opérations inverses donc peu importe le nombre cherché, il sera toujours capable de le retrouver. Au niveau de la 2e solution…
>
> 23. **É :** (un élève l'interrompt) la réponse est incomplète…
>
> 24. **ENS** : Pardon ?
>
> 25. **É** : <u>Il manque les explications</u>
>
> 26. **ENS** : Ah ok, au niveau des explications en phrases complètes et tout cela, oui, je suis d'accord, toi, tu lui aurais enlevé des points hein ?
>
> 27. **É** : Oui.
>
> 28. **ENS** : Tu as tout-à-fait raison. Il y a aussi d'autres endroits où on peut <u>enlever des points</u>, où on pourrait ne pas être d'accord, avec les nombres au-dessus (elle pointe les calculs du milieu) au lieu d'utiliser notre méthode en entonnoir. Pour ce qui est du 2e problème. Pour ce qui est d'Amélie, oh la la, elle a été critiquée sévèrement. Plusieurs ont dit qu'elle était un peu folle ! Est-ce qu'elle est arrivée à la bonne réponse ? Est-ce qu'elle est si poche que cela ?

Dans cet échange, on constate que l'enseignante amorce l'échange sur la précision des savoirs en mentionnant que la solution peut être plus formelle (« *il n'a pas marqué le « x »* »). Dans le verbatim, on remarque aussi que c'est un élève qui interrompt l'enseignante pour préciser que la qualité du discours est à questionner (« *il manque les explications* »). On peut penser que la position d'enseignant de l'élève l'amène à centrer son attention sur les explications et il peut-être prend-il conscience de l'importance de laisser les explications dans ses raisonnements personnels.

Soulignons que l'enseignante revient aussi dans les deux groupes sur l'usage inadéquat du symbole d'égalité sur la copie d'Amélie. Cette imprécision de l'usage du symbole de l'égalité avait d'ailleurs été anticipée dans l'analyse a priori de la situation.

Plusieurs échanges amorcés par l'enseignante avec les élèves sur des éléments de discours ont aussi été notés. Les deux stratégies présentées amènent l'enseignante à poser des questions ouvertes aux élèves : « *pourquoi vous diriez que c'est Maxime qui est le plus facile (à comprendre) ? Quand vous avez regardé cette démarche-là, plusieurs m'ont dit que c'était celle qu'ils ont préférée, pourquoi ?* ».

Dans le groupe R, l'enseignante revient sur les calculs d'Amélie pour expliquer son 289 et 324 :

72. **ENS** : He, dernière chose ici, des correcteurs aguerris et un peu plus sévères m'ont dit: ça ici, on a un problème avec ça (elle retourne à l'équation au tableau) attendez que je me cherche, ici, ces deux-là vont pas là, 289 et 324 (elle encercle les deux nombres au tableau). Qu'est-ce qui ne marche pas selon vous?

73. **É**: D'où vient le 289 ?

74. **ENS**: Ok c'est pas que c'est faux, c'est juste qu'on comprend pas d'où ils viennent. Faut qu'ils nous expliquent. Le 289 venait du 17 x 17 (en montrant l'aire intérieure du miroir).

75. **É**: Oui, mais combien de fois on va faire, vu qu'on a 29 copies à corriger, on va perdre notre temps.

76. **ENS**: Pardon ?

77. **É**: Non, mais je veux dire on n'a pas de temps à perdre à chercher ce qu'elle a fait.

78. **ENS**: Mais ça fait partie de mon travail par exemple. Quand, même si la réponse est bonne, il va falloir que j'aille vérifier de quelle manière elle s'y est prise là, souvent je vais aller chercher les petits points comme ça, oui, ok […]. La dernière chose là-dessus. J'ai trouvé cela intéressant, il y en a qui m'ont dit, il me semble dans ce groupe-ci mais surement dans l'autre groupe, y a des personnes qui m'ont dit, eh, moi je préfère l'autre démarche, je la comprends plus, elle est plus claire, celle de Maxime, mais on voit qu'Amélie, elle est meilleure. Ils pensaient qu'Amélie, ce serait une élève qui serait meilleure. Est-ce qu'il y en a qui sont d'accord avec ça?

Dans les deux groupes, les interactions sur la stratégie d'Amélie (terme général à partir de l'aire) sont plus difficiles. Plusieurs élèves écrivent que la stratégie d'Amélie est meilleure que celle de Maxime, tel que l'enseignante le mentionne dans le verbatim précédent. On peut penser que certains élèves optent pour la stratégie d'Amélie parce qu'ils ne la comprennent pas bien ou la trouvent plus « savante » que celle de Maxime. En effet, comme l'ont observé Healy et Hoyles (2000), il arrive que des élèves considèrent plus convaincante une preuve simplement parce qu'ils ont de la difficulté à en suivre le raisonnement. Le fait de ne pouvoir saisir le raisonnement montre sa complexité et suggère sa validité. Dans l'échange suivant, l'enseignante met en évidence qu'Amélie n'est pas en mesure de trouver une formule pour se sortir des « essais » à la sous-question b) ce qui lui permet d'insister sur l'outil algébrique pour généraliser :

50. ENS : Elle n'a pas été capable de trouver une formule, elle a fait essais et erreurs. Là, là, ça se complique, c'est parfait. (elle rit). Elle a compris, elle a réussi à arriver, mais c'était limité par le fait qu'elle a été obligée de faire « essais-erreurs » rendue ici.

51. **É**: Oui.

52. **ENS** : Donc, en bout de ligne, elle a été en quelque part, un peu chanceuse de trouver rapidement. Parce que si j'avais donné un nombre très très grand, elle n'aurait pas réussi à le trouver, peut-être, ok? Si elle avait eu un temps limité et un nombre très très grand, ça n'aurait pas fonctionné. Donc, à ce niveau-là, elle, elle n'a pas réussi à le prendre d'une manière générale, de généraliser. Oui Rami?

L'intention de l'enseignante est d'amener les élèves à obtenir une formule qui permet ce calcul à l'inverse. Dans ce cas toutefois, Amélie est placée devant un développement de la forme $(n+2)^2 - n^2$. L'enseignant souhaite que les élèves s'éloignent d'une stratégie comme celle d'Amélie par essais-erreurs pour la sous-question b). Amélie présente toutefois une stratégie construite sur des essais contrôlés, c'est-à-dire que, partant d'une valeur qu'elle se fixe (initialement 17 carreaux), elle calcule le nombre de carreaux nécessaires pour faire son encadrement (dans un premier temps, 72 carreaux). Constatant que ce n'est pas assez, elle augmente la valeur du côté à 18 carreaux. Ce n'est toujours pas assez. Elle poursuit jusqu'à remarquer qu'à chaque fois qu'elle ajoute un carreau de mesure de côté, le nombre de carreaux nécessaires pour faire l'encadrement augmente de 4. Elle poursuit donc les essais jusqu'à 88 carreaux pour faire l'encadrement. Un côté de 21 unités carreaux est nécessaire pour arriver à cette mesure. La stratégie est plutôt efficace dans le contexte du problème : Amélie ne voit peut-être pas la pertinence de généraliser compte tenu qu'elle converge vers la réponse. Le problème ne la confronte pas à la limite de sa stratégie d'essais.

Avec la question ouverte (« *qu'est-ce qui avait été difficile dans celle d'Amélie ? »*) dans l'un des échanges avec les élèves, l'enseignante laisse beaucoup d'espace aux élèves, mais ces derniers semblent éviter la question : ils se maintiennent sur la stratégie de Maxime, plus rassurante, en l'analysant en détails. Dans les deux groupes, particulièrement dans le groupe R, on semble étirer le temps sur la solution de Maxime afin d'éviter de comprendre la solution d'Amélie.

Il semble que la solution proposée par Amélie soit si éloignée des connaissances mathématiques des élèves, qu'ils sont réticents à s'y investir. De manière générale, « pour assurer l'avancement dans le savoir, un contenu introduit par l'enseignant doit apparaître nouveau aux élèves et cependant être relié à des savoirs connus de manière à ce qu'ils puissent établir un premier rapport sur lequel pourra s'appuyer l'enseignement » (Giroux et René de Cotret, 2001, p. 158). Avec le groupe R, l'enseignante passe plus de temps sur la solution de Maxime qui a un degré de proximité avec ce que les élèves connaissent permettant une progression plus adéquate dans le temps didactique.

Comme autre apport pour l'enseignante, on peut voir dans l'exploitation des solutions d'élèves-fictifs, des interactions centrées sur des éléments de communication plus généraux (e.g. l'organisation de la solution) en prenant en compte les commentaires laissés par les élèves-enseignants sur les copies de Maxime et d'Amélie. Le type de rétroaction donnée aux élèves-fictifs par les élèves-enseignants est intéressant et les commentaires sont exploités par l'enseignante. La rétroaction passe beaucoup par un pointage et certains éléments qualitatifs de communication (« *Bravo ! Tu peux faire mieux* ». etc.). L'enseignante, lors du retour, met en évidence le recours aux notes pour communiquer : « *vous auriez enlevé combien de points ici ?* ». Elle retourne ainsi les élèves vers leur responsabilité d'enseignant.

##### *4.2.3.2 Placer l'élève en position d'enseignant joue sur la responsabilité de l'élève de la résolution de la tâche*

Dans cette situation, on constate qu'une mécanique de quatre variables didactiques influent sur la responsabilité des élèves de résoudre le problème demandé : la position de l'élève (comme enseignant), ses interlocuteurs (deux élèves-fictifs, une classe-fictive et l'enseignante); les registres du problème (trois dessins désordonnés) et le type de tâche demandée (décoder et commenter). La position « d'enseignant » proposée amène les élèves vers une analyse plus fine des solutions-fictives (qui arrivent à la même réponse). Ils les analysent, les annotent, et se positionnent sur la meilleure stratégie.

La posture d'enseignant qu'il adopte lui confère un rôle d'expert et il ne peut se référer à quelqu'un d'autre pour résoudre la situation. L'élève-enseignant assume la responsabilité de la validation du résultat et cela amène un caractère a-didactique à la situation de l'*Enseignant*. Dans ce contexte, l'enseignante reçoit de la part des élèves qui assument volontiers leur rôle d'enseignant un accès renouvelé aux raisonnements, qu'ils formulent, sous formes de commentaires et de prises de position, ce qui constitue un levier pour ajuster son enseignement.

*4.2.3.3 Quelques commentaires et prises de conscience de l'enseignante suite à cette situation*

L'enseignante explique dans son journal de bord qu'elle aimerait « *exploiter l'élaboration de règles à partir d'illustrations comme les miroirs en présentant d'abord une série d'autres illustrations pour offrir une gradation du niveau de difficulté (ex : les allumettes; des tables de restaurant, etc….puis les miroirs)* ». Par cette affirmation, elle souhaite apporter des modifications à son enseignement en proposant l'exploitation de plusieurs présentations de suites ayant un niveau de difficulté différent. Il s'agit d'un autre apport de la situation puisque son exploitation a fait voir à l'enseignante d'autres possibilités de présentations de suites qui s'éloignent des stratégies de résolution classiques.

D'ailleurs, elle va plus loin en posant un regard critique sur la manière dont elle a introduit le travail sur les suites : « *…la créativité pour trouver des solutions a été freinée selon moi puisque la majorité commençait avec les tables de valeurs telles que vues. Ce n'est pas faux, mais cela ne permet pas de répertorier un grand nombre de solutions différentes et de percevoir l'effort de les communiquer. En utilisant davantage de situations de la sorte […] pour introduire l'algèbre, je pourrais mobiliser davantage de savoirs. Je m'efforcerai à l'avenir de leur soumettre un plus grand nombre de situations permettant de « créer » une formule sans suivre d'algorithme et d'exploiter les différentes solutions trouvées* ». Elle voit un avantage à éloigner les élèves de la stratégie canonique pour voir l'effort de communication des élèves et, de ce fait, enrichir son enseignement des savoirs mathématiques en accédant probablement mieux aux raisonnements.

*Tableau 16 - Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour l'Enseignant*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Déroulement du retour**<br>Premier groupe: SÉ | **Déroulement du retour**<br>Deuxième groupe : R |
|---|---|---|
| - L'enseignante signale que le décodage demandé aux élèves est complexe puisqu'ils auront trois documents à analyser.<br>- Elle précise qu'elle ne considère pas qu'une des solutions des élèves-fictifs est meilleure que l'autre.<br>- Elle apprécie davantage la stratégie de Maxime, plus près de la réalité algébrique qu'elle a enseignée.<br>- Selon l'enseignante, les exigences d'un enseignant y sont pour beaucoup dans le choix par les élèves de la solution entre Maxime et Amélie.<br>- Elle espère que les élèves utiliseront l'algèbre dans leur résolution personnelle du problème à défaut de quoi elle fera un retour avec eux.<br>- De par ses années d'expérience, elle se dit plus ouverte à l'accueil de différentes stratégies lors du retour.<br>- Elle croit que les élèves auront plus de difficulté à comprendre pourquoi la stratégie d'Amélie fonctionne. | - L'enseignante met au tableau la production de l'élève fictif Maxime et amorce une discussion sur cette dernière.<br>- L'enseignante pose une question en lien avec la copie d'Amélie : « qu'est-ce qui avait été difficile dans celle (la copie) d'Amélie ? ».<br>- L'enseignante algébrise la solution de Maxime et elle poursuit la discussion sur cette dernière.<br>- Elle questionne les élèves à savoir pourquoi ils ont moins fait la méthode canonique apprise.<br>- Elle poursuit la discussion sur la copie de Maxime en questionnant la place de « l'essai-erreur » dans la production de ce dernier.<br>- Elle souhaite aller vers la solution d'Amélie, mais un élève poursuit la discussion sur la copie de Maxime en disant que des explications sont manquantes.<br>- L'enseignante va vers la stratégie d'Amélie en faisant un retour sur le chapitre des suites<br>- Une critique plénière a lieu sur la copie d'Amélie et on remet en avant-plan la place de « l'essai-erreur » dans la partie b) de la solution et on analyse plus finement ses erreurs (notamment l'utilisation du signe de l'égalité sur laquelle elle passe du temps).<br>- L'enseignante questionne le fait que plusieurs ont dit qu'ils préféraient la solution de Maxime, mais qu'ils trouvaient Amélie meilleure.<br>- On s'interroge sur le nombre de points à accorder à Amélie tout en référant à la méthode des « cinq étapes » de résolution d'un problème algébrique écrit récemment apprise. | - L'enseignante met au tableau la production de l'élève fictif Maxime et amorce une discussion sur cette dernière.<br>- À partir des deux copies (Amélie et Maxime, mais particulièrement celle de Maxime), l'enseignante va vers l'algèbre en réintroduisant sommairement la méthode classique qu'elle a enseignée (table de valeurs; etc.).<br>- Elle poursuit la discussion sur la copie de Maxime en questionnant la place de « l'essai-erreur » dans la production de ce dernier : elle aborde la question de l'efficacité et elle fait une analyse plus fine des erreurs de ce dernier.<br>- L'enseignante va ensuite vers la copie d'Amélie avec une question ouverte (Comment vous l'avez trouvée sa démarche ?).<br>- Un échange à propos de la copie d'Amélie et l'enseignante remet en avant-plan la place de « l'essai-erreur » dans la partie b) de la solution et analyse plus finement les erreurs (notamment l'utilisation de l'égalité sur laquelle elle passe du temps).<br>- L'enseignante revient sur la stratégie d'Amélie en faisant un retour sur un chapitre « ancien » et on questionne le manque de communication/d'explications d'Amélie.<br>- Elle suscite le questionnement autour de la copie d'Amélie : « Amélie, serait-elle meilleure ? ».<br>- L'enseignante demande aux élèves de dire pour qui selon eux elle aurait donné plus de points.<br>- Elle demande aux élèves si ceux-ci ont trouvé cette situation plus facile que celle du Magicien.<br>- Elle questionne les élèves à savoir pourquoi ils ont moins fait la méthode canonique apprise. |

### *4.2.4 Les interactions et l'espace dévolu aux élèves dans la situation de la Balance*

*Tableau 17 - Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la Balance*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Déroulement du retour**<br>Premier groupe: SÉ | **Déroulement du retour**<br>Deuxième groupe : R |
|---|---|---|
| - Selon l'enseignante, le problème est plus facile à expliquer en « mots » pour les élèves.<br>- Elle ne croit pas que ces derniers « mathématiseront » le problème en ayant recours à des symboles.<br>- Selon elle, la question a) ne posera pas de problème particulier.<br>- La question b) est un peu plus difficile, mais les élèves utiliseront ce qui a été découvert en a) pour y arriver.<br>- Elle voit par contre le défi qu'imposera la question c). Elle croit davantage que les élèves utiliseront la méthode « d'essais-erreurs » pour arriver à trouver la solution. Peut-être quelques-uns utiliseront l'algèbre, mais elle n'a en est pas certaine ?<br>- L'enseignante croit que plusieurs élèves travailleront sur le dessin pour répondre aux questions.<br>- Elle considère le problème riche en termes de stratégies : explications en mots; recours à l'algèbre; référence à la vie courante; essais-erreurs; etc.<br>- Finalement, elle anticipe des difficultés quant à la compréhension de la question. Il faudrait changer la question du problème. Au lieu d'écrire « peux-tu comparer… », il faudrait indiquer « compare… » et dire aux élèves que la comparaison est possible. Elle croit que certains élèves répondront « oui » ou « non » à la question, sans développement. | - L'enseignante distribue aux élèves leurs écrits sur la situation en leur précisant de ne rien écrire de nouveau sur la feuille.<br>- Elle mentionne qu'elle reviendra sur certains de leurs raisonnements.<br>- L'enseignante revient sur la formulation de la question : « comparer, ça veut dire quoi ? » étant donné que certains ont répondu par oui ou non à la question.<br>- Elle invite un élève à expliquer comment comparer la masse d'un verre et d'un bol (sous-question a)). Ce premier raisonnement s'appuie sur « une élimination d'un verre » de chaque côté de la $1^{re}$ balance.<br>- Elle dit qu'elle a repéré d'autres raisonnements (sans les montrer) et aborde l'équilibre de la sous-question b) en questionnant un autre élève. L'élève dit être parti du $2^e$ équilibre pour tout transformer en bols et, par la suite, il considère le $1^{er}$ équilibre.<br>- Elle évoque que certains ont algébrisé le problème en posant des variables sans montrer cette stratégie.<br>- Elle interpelle une élève qui avait fait une stratégie intéressante pour la sous-question c). L'élève ne se souvenait pas de son raisonnement.<br>- L'enseignante demande à l'élève de lire son raisonnement fondé sur le dénominateur commun en mettant en relation des assiettes et des bols. Elle demande si d'autres ont procédé de la même manière. Elle interpelle plusieurs élèves par leur prénom,<br>- Elle part de la réponse donnée par un élève : 3 Caf. = 4 Ass.<br>- Elle demande à un élève d'expliquer son raisonnement par l'ajout d'objets sur la première balance. L'élève n'arrive pas à conclure son raisonnement. L'enseignante le complète.<br>- Elle demande si des élèves ont des commentaires. Un élève répond : « beaux dessins madame ! ». | - L'enseignante distribue aux élèves leurs écrits sur la situation en leur précisant de ne rien écrire de nouveau sur la feuille.<br>- Elle relit avec les élèves l'énoncé du problème.<br>- Elle invite un élève au TNI pour expliquer son raisonnement à la sous-question a).<br>- L'élève au TNI traduit en mots la $3^e$ équation. L'enseignante lui demande de lire ce qu'il traduit ce qu'il fait.<br>- Un autre mentionne ne pas avoir compris. L'élève au TNI reformule alors en faisant une croix sur ce qu'il retire de chaque plateau du $3^e$ équilibre.<br>- L'enseignante félicite l'élève. Elle relit pour le bénéfice du groupe les traces de raisonnements qu'il a laissées en y corrigeant quelques imprécisions.<br>- Elle invite un autre élève au tableau pour la sous-question b).<br>- En voyant les actions de l'élève sur le dessin, l'enseignante lui demande des précisions simultanément à la rédaction du raisonnement : « pourquoi barres-tu la cafetière et les 4 bols ? ». Élève : « à cause du premier équilibre ».<br>- L'élève colore d'une même couleur les objets avec la même masse et retranscrit le tout en expressions avec des mots. L'enseignante appuie à l'oral les explications écrites de l'élève.<br>- L'enseignante mentionne qu'il y a plusieurs autres façons de faire.<br>- Elle invite un $3^e$ élève pour venir faire la dernière question. Il vient avec sa feuille et relit ses notes. L'enseignante lui demande s'il est parti avec un dessin. Il répond que non. Il a raisonné avec des mots.<br>- L'élève écrit son raisonnement au TNI avec des calculs. L'enseignante lui indique qu'elle comprend, car il a utilisé un dénominateur commun, mais vient compléter les explications.<br>- Elle explique que les élèves qui ont réussi la sous-question c) l'ont faite à partir du dénominateur commun. Ceux qui ont essayé de travailler sur le dessin ont eu plus de difficulté.<br>- Un élève demande si cette situation est importante. L'enseignante répond par l'affirmative et explique.<br>- L'enseignante revient sur la formulation de la question : « comparer, ça veut dire quoi ? » étant donné que certains ont répondu par oui ou non à la question. |

#### 4.2.4.1 *Un besoin pour les élèves de désigner oralement des objets et de formuler un raisonnement passé*

De son analyse des copies, l'enseignante sait que plusieurs stratégies ont émergé et elle souhaite les travailler avec les élèves. Si l'enseignante avait anticipé que les élèves trouveront plus facile d'écrire en mots leur raisonnement, dans le groupe SÉ, elle remarque que les élèves ont de la difficulté à narrer les objets de leur raisonnement alors qu'elle les questionne. Cet écart entre les traces écrites et la verbalisation du raisonnement peut s'expliquer, d'une part, par le temps entre le moment où les élèves réalisent la situation et le moment du retour : il s'est écoulé un mois (la réalisation de la situation ayant été faite avant la période de relâche et son retour, après). Les élèves ont donc besoin de temps pour se réapproprier la stratégie qu'ils ont écrite quelques semaines auparavant.

D'autre part, les élèves désignent difficilement les objets pertinents pour leur permettre de décrire à l'ensemble de la classe leur stratégie. Cette difficulté est d'autant plus présente dans la situation de la *Balance* puisqu'il n'y a pas de désignation d'objets a priori : trois équilibres sont présentés sous forme de dessins sans nombre et l'élève doit choisir un mode de communication pour expliquer son raisonnement (algèbre, jeu sur les dessins, fixer un poids fictif, etc.).

Le **tableau 31** et le **tableau 32** ont pourtant montré que sur papier, les stratégies mathématiques et le travail de communication écrit sont foisonnants. Il est par contre plus difficile pour les élèves du groupe SÉ de discourir oralement sur ce problème sans prendre directement appuie sur les dessins présentés. Par le questionnement de l'enseignante, les élèves doivent s'expliquer oralement et à distance (à leur pupitre) en pointant les représentations dans la présentation du problème. Il est alors plus ardu pour les élèves d'expliquer les pas de leur raisonnement en dirigeant à distance les gestes de l'enseignante sur le TNI : des élèves pointant de loin à l'enseignante quel équilibre considérer, quel objet annuler, etc.

Dans le groupe R, l'enseignante apprend du retour avec le groupe SÉ et demande à des élèves de venir expliquer leur raisonnement, à l'avant, sur le TNI. Il est en effet plus facile pour l'élève qui explique de montrer les actions qu'il fait en jumelant langage écrit et oral. C'est aussi une occasion d'ajouter le langage gestuel puisque l'élève pointe des objets ou des équilibres parfois sans avoir les mots pour bien désigner les objets.

Par l'amalgame de trois langages (oral, écrit et gestuel), il est plus facile pour l'élève, mais aussi pour l'enseignante de suivre les étapes du raisonnement. Les « élèves-enseignants » prennent appui sur les images projetées sur le TNI et reconstruisent le raisonnement développé quelques semaines auparavant. Ils ont également sous la main leur production qu'ils décodent.

Cette occasion d'accès en direct aux raisonnements des élèves constitue un apport pour l'enseignante. En inviter un élève à prendre le contrôle des explications au TNI dans le groupe R, elle s'offre une image multidimensionnelle du raisonnement de l'élève en prenant du recul quant à son rôle d'animatrice du retour sur la situation. Elle devient elle-même spectatrice du raisonnement de l'élève. L'enseignante l'aide à pousser plus loin ses explications, à préciser des éléments, à formaliser des éléments, et même à relancer des questions à la classe sur les raisonnements présentés. L'enseignante mentionne à l'un des élèves au TNI : « *Je vais vous montrer comment on aurait pu garder le même raisonnement, mais l'écrire d'une façon peut-être un peu plus compréhensible pour les autres* ». Elle indique alors de manière plus formelle un rapport entre les assiettes et les bols (elle inscrit au tableau $\frac{Ass}{Bol}$).

#### *4.2.4.2 Une occasion pour l'enseignante de travailler l'algèbre de manière moins formelle*

La situation de la *Balance* permet aussi à l'enseignante de mettre en évidence quelques éléments du raisonnement algébrique de manière imagée. A priori, pour une majorité d'élèves, la représentation des trois équilibres sous forme de dessins semble loin de l'algèbre symbolique à laquelle ils sont de plus en plus confrontés. Pour reprendre une expression de Brousseau, on « masque » les propriétés et opérations algébriques sous une forme plus imagée et peut-être plus engageante pour l'élève comme on le constate par la multitude des stratégies personnelles qui ont émergées. L'enseignante est soucieuse de faire comprendre aux élèves que derrière les opérations sur les objets (élimination, ajout ou comparaison) qui paraissent a priori anodines, se cachent des opérations algébriques. Elle leur demande : « *Est-ce que vous réalisez tranquillement que quand on enlève de chaque côté, on fait notre méthode des opérations inverses ? »*.

Un peu plus loin, alors qu'un élève lui demande si ce type de problème (la *Balance*) est important, l'enseignante répond :

> « Oui, c'est très important en fait parce que ce qu'on fait quand on fait ça, on essaie de <u>décortiquer notre algèbre</u>. Tu enlèves moins 4 d'un côté, moins 4 de l'autre. C'est vraiment... il y en a qui <u>l'ont fait avec des « x »,</u> qui ont mis moins 4 bols, moins 4 bols, moins « 4x » de chaque côté, ça a été excellent. Ça a très bien fonctionné. Donc, si tu ne comprends pas, si tu me demandes si c'est important, c'est peut-être parce que tu n'es pas sûr de bien comprendre, mais c'est vraiment <u>le raisonnement algébrique en arrière</u> qu'on essaie de travailler. Ok. Donc, il y avait un dénominateur commun, c'est comme si quand on le met en fraction, 1 pour 3, 1 pour 4, ça nous amène à 12 et on comprend que les deux aussi sont équivalents. Donc, quelque part, on ne peut pas dire que ce n'est pas important, <u>parce que c'est vraiment notre raisonnement d'algèbre qui est en arrière de ça</u>.

Le travail sur les dessins par les élèves est une occasion (un apport) pour l'enseignante de revenir sur le sens des raisonnements algébriques dans la résolution d'équations, mais de manière plus imagée. Elle insiste à nouveau, avec l'appui des dessins des trois équilibres, sur les étapes de résolution d'une équation algébrique en explicitant que ce qui est enlevé d'un côté de l'équilibre doit aussi être retiré de l'autre pour maintenir l'équilibre.

La situation de la *Balance* n'oblige pas un format pour travailler les opérations et propriétés algébriques en barricadant l'élève dans un discours formel en insistant sur son usage[98]. Dans les retours des

[98] Allant ainsi dans le même sens des propos de Sierpinska (1998) qui sont cités à la **<u>section 1.2.3</u>**.

deux groupes, l'enseignante fait le choix de ne pas formaliser par le symbolisme algébrique les déductions partielles prenant en compte les différentes équivalences exposées. Comme elle l'expose dans son journal de bord, elle apprécie que les notions d'algèbre soient exploitées différemment dans cette situation et soient perceptibles dans les explications en mots des élèves. Elle apprécie aussi que la situation permette aux élèves de s'exprimer avec le langage mathématique d'une manière naturelle et souhaite réinvestir la représentation de la balance dans le contexte de la résolution de problèmes.

Elle voit déjà des apports pour son enseignement l'an prochain : « *L'image de la balance est forte pour exprimer le sens de l'égalité. Je vais reprendre cette idée l'an prochain. J'avais souvent utilisé la balance auparavant, mais seulement pour modéliser les opérations à faire de chaque côté. Là, j'irais plus dans une activité d'intro avec cette activité et je pourrais en créer de semblables tout au long de l'apprentissage des équations.* ». Ainsi, le choix de la variable de présenter le problème de la *Balance* sans données numériques et à partir de dessins offre aussi un avantage pour l'enseignante : elle a déjà des idées pour modifier son enseignement et y voit même un appui pour modéliser les opérations dans un contexte de résolution de problèmes. Elle explique : « *Il serait intéressant que je reprenne une situation semblable et que nous fassions le parallèle avec les équations algébriques dans les résolutions de problèmes qui sont vraiment le nerf de la guerre, surtout pour mes élèves du groupe régulier* ». Elle voit donc la possibilité de faire un travail syntaxique[99] dans le cadre de la résolution de problème avec la représentation de la *Balance*.

*4.2.5 Les interactions et l'espace dévolu aux élèves dans la situation des Équations*

[99] On peut aussi certainement voir un travail sémantique puisque l'enseignante devra probablement revenir au décodage des opérations en jeu menant à la mise en équation laquelle serait représentée par une balance.

*Tableau 18 - Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la sous-question a) des Équations*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Déroulement du retour**<br>Premier groupe: R | **Déroulement du retour**<br>Deuxième groupe : SÉ |
|---|---|---|
| - Pour la première équation (3x + 5 = 9x – 17), l'enseignante croit que les élèves des deux groupes diront que Mylène aura la meilleure solution étant donné que sa démarche est très près de ce qu'ils ont appris en classe malgré que la réponse ait été arrondie (x = 3,6).<br><br>- Elle ne trouve pas cette équation particulièrement difficile.<br><br>- Elle souhaite que les élèves précisent que Mylène aurait dû valider sa solution pour se rendre compte de son imprécision : elle aurait préféré que Mylène laisse sa solution en fraction.<br><br>- Elle croit finalement que les élèves auront de la difficulté à suivre le raisonnement de Pascal puisque ce dernier laisse peu de traces de sa démarche. | - L'enseignante lit l'équation en précisant qu'il faut prendre position pour l'une ou l'autre des réalisations.<br>- Elle interpelle un élève sur son choix et les raisons qu'il justifie (il mentionne Mylène pour avoir bien respecté les étapes).<br>- L'enseignant lui demande de dire ce qu'il entend par « étapes ». Il mentionne le retrait des « x ».<br>- L'enseignante complète les explications de l'élève.<br>- Elle relance le groupe : « Est-ce que l'un ou l'autre des deux a la bonne réponse ? » Un élève mentionne Mylène.<br>- L'enseignante relance encore : « Comment on peut en être sûr? Est-ce qu'on a trouvé une façon d'être certain? ». Un élève mentionne la vérification.<br>- L'enseignante répète « la vérification » et invite les élèves à vérifier la réponse avec leur calculatrice : « Pourriez-vous la faire la vérification? Comment on fait pour vérifier? »<br>- Elle crée une discussion autour des réponses obtenues : « Est-ce que, par hasard, ça vous donne, 15,8 d'un côté et 15 ,4 de l'autre? »<br>- Elle fait ressortir l'imprécision avec le périodique et invite à vérifier avec la fraction : « Pourriez-vous réessayer la vérification mais avec le $\frac{22}{6}$? ». Les élèves arrivent à 16 des deux côtés.<br>- L'enseignante pose la question suivante concernant la stratégie de Pascal : « Qu'est-ce qui ne va pas dans cette démarche-là, pourquoi avez-vous préférés Mylène en majorité? »<br>- Une discussion a lieu à savoir si Pascal a le droit de faire sa démarche, d'enlever de l'autre côté ? « Oui, s'il enlève la même quantité ».<br>- L'enseignante crée la discussion pour repérer avec les élèves les erreurs et les corriger en groupe.<br>- Après cette analyse, elle invite les élèves à reprendre position : ils adhèrent encore à la stratégie de Mylène.<br>- L'enseignante termine par une présentation de toutes les réponses qu'elle a repérées dans les productions des élèves et invite le groupe à prendre position sur chacune: 3,6 ; 3,37, 22\|6, 11/3, et $3\frac{2}{3}$ ? | - L'enseignante invite les élèves à relire l'énoncé individuellement.<br>- Elle invite les élèves à voter sur le choix de stratégie préférée : la majorité lève la main pour Mylène.<br>- Elle interpelle un élève sur son choix et les raisons qu'il justifie (« Sa démarche est mieux établie et on voit les opérations qu'elle a faites »).<br>- L'enseignante amène la comparaison avec Pascal et cible un élève qui avait voté pour lui. Il renchérit : « Oui mais parce que Mylène, je n'ai rien compris. Ce n'est vraiment pas clair. Pascal, au moins on voit le résultat, mais Mylène, c'est vraiment n'importe quoi ».<br>- L'enseignante invite l'élève à s'expliquer et il mentionne que le « -3x », lui, il le met au-dessus, pas en-dessous.<br>- Un autre élève mentionne que Pascal n'arrive pas à la bonne réponse. L'enseignante prend la balle au bond et demande aux élèves si Mylène a la bonne réponse et comment on peut le vérifier.<br>- Un élève mentionne la vérification.<br>- L'enseignante invite les élèves à vérifier la réponse avec leur calculatrice. Les réponses 15,8 et 15,4 sont mentionnées. Une discussion a lieu mentionnant que les deux n'ont pas la bonne réponse, mais que Mylène est proche.<br>- Elle fait ressortir l'imprécision avec le périodique et invite à vérifier avec la fraction.<br>- Un élève demande comment entrer le périodique sur la calculatrice. L'enseignante lui indique d'entrer 3,66666 jusqu'à ce que tout l'espace soit comblé.<br>- On revient sur la stratégie de Pascal que certains ont qualifié de « n'importe quoi ».<br>- Une discussion a lieu à savoir si Pascal a le droit de faire sa démarche, d'enlever de l'autre côté ?<br>- L'enseignante crée la discussion pour repérer avec les élèves les erreurs et les corriger en groupe. Elle mentionne que l'erreur qu'il a faite est à la toute fin.<br>- L'enseignante termine par une présentation de toutes les réponses qu'elle a repérées dans les productions des élèves et invite le groupe à prendre position sur chacune: 3,6 ; 3,37, 22\|6, 11/3, et $3\frac{2}{3}$ ?<br>- Elle ouvre une nouvelle discussion : « $(3.\overline{66})$? « Est-ce que je devrais l'accepter, en tant que prof cette réponse-là? ». Une discussion sur la précision de la réponse s'en suit.<br>- Une nouvelle discussion : « Si $\frac{22}{6}$ est bon, est-ce que l'inverse est nécessairement bon? »? |

*Tableau 19 - Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la sous-question b) des Équations*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Stratégies mathématiques/ facettes de la communication lors du retour**<br>Premier groupe: R | **Stratégies mathématiques/ facettes de la communication lors du retour**<br>Deuxième groupe : SÉ |
|---|---|---|
| - Pour la deuxième équation $(15 \cdot (12 - x) = 150)$, l'enseignante croit que les élèves auront davantage d'affinités avec la solution de Mylène puisque cette dernière opère la distributivité dans la résolution tel qu'enseignée en classe et ce, malgré l'erreur.<br>- Elle croit aussi que certains élèves, particulièrement dans le groupe SÉ, diviseront par 15 dès le départ pour réduire l'équation.<br>- Elle se questionne sur le réflexe de validation des réponses obtenues par les deux élèves : « mes élèves auront-ils le réflexe de faire l'opération inverse pour voir qui arrive à la bonne réponse ? »<br>- Elle pense finalement que des élèves rejetteront la solution de Pascal étant donné qu'elle est moins développée que celle de Mylène.<br>- Elle fait alors un parallèle avec la solution d'Amélie dans la 3e situation : certains élèves diront « je ne comprends pas ce qu'il a fait, donc sa solution sera meilleure : il est plus avancé que moi…. ».<br>- L'enseignante déplore ne pas avoir assez insisté sur les autres méthodes de résolution d'équations et mentionne qu'elle a davantage enseigné la méthode « classique » de développement en ramenant le regroupement des variables à gauche et les constantes à droite. | - L'enseignante mentionne qu'elle a trouvé intéressant de lire leurs réponses. Elle dit que les positions sont partagées. Elle fait voter les élèves sur le choix à main levée<br>- Un élève indique avoir choisi Mylène : « Sa démarche, elle a utilisé les 5 étapes pour trouver la réponse ». L'enseignante le questionne sur la « démarche en 5 étapes ». Il confond avec la démarche enseignée en résolution de problèmes. L'enseignante corrige par « méthode des opérations inverses ».<br>- Elle continue de questionner l'élève et lui demande s'il peut repérer l'erreur dans la démarche de Mylène. L'élève dit la distributivité.<br>- Elle demande si d'autres élèves avaient repéré cette erreur et les invite à vérifier la réponse « -30 » dans l'équation. Un élève dit que ça arrive à 630.<br>- L'enseignante ouvre la discussion sur la solution de Pascal : « Pascal lui ? ».<br>- Elle questionne un élève pour savoir pourquoi il l'a choisi et lui insuffle : « parce qu'il a choisi la bonne réponse ? ». L'élève acquiesce.<br>- Un élève mentionne que Pascal a fait une déduction. L'enseignante mentionne : « je me suis aperçue que souvent on fait celle des opérations inverses puis on laisse un peu de côté celle-là de déduction ».<br>- Elle explique la déduction de Pascal. Elle prend conscience qu'on se lance souvent dans la résolution d'équations et le mentionne aux élèves.<br>- Elle invite à nouveau les élèves à voter sur la préférence. Certains ont changé d'idée. Elle réitère l'importance de vérifier sa réponse dans une résolution d'équations. | - L'enseignante mentionne que plusieurs ont choisi Mylène alors qu'elle n'avait pas la bonne réponse et demande aux élèves pourquoi ?<br>- Un élève répond : « Parce que c'est plus clair à suivre? On voit les étapes qu'elle a faites ».<br>- L'enseignante relance : « est-ce que vous arrivez à suivre son erreur ? ».<br>- L'enseignante demande où est l'erreur Un élève identifie la distributivité.<br>- Elle invite les élèves à faire la vérification des réponses dans les deux équations.<br>- L'enseignante ouvre la discussion sur la solution de Pascal : « Qu'est-ce qu'il a pensé? Qu'est-ce que ça vous permet de voir? ».<br>- Un élève répond : « Parce qu'à la place de faire la distributivité, il a enlevé le 15. Il a divisé ».<br>- L'enseignante explique le raisonnement de Pascal en mettant en évidence le « donc ».<br>- Un élève mentionne que sa déduction n'est pas « mathématique » et l'enseignante lui demande pourquoi.<br>- Une discussion a lieu autour de la stratégie de Pascal.<br>- L'enseignante mentionne qu'il n'a pas fait la méthode des opérations inverses comme ils sont habitués de l'appliquer.<br>- L'enseignante mentionne que d'une classe à l'autre, la façon dont montre à résoudre une équation peut être différente, mais que Pascal aurait dû laisser plus de traces, notamment en indiquant sa division par 15.<br>- L'enseignante propose en terminant cette partie qu'il aurait été pertinent de jumeler les deux stratégies : l'une complète l'autre. |

*Tableau 20 - Attentes et anticipations de l'enseignante et les grandes étapes des déroulements des retours dans chacun des deux groupes pour la sous-question c) des Équations*

| **Attentes/anticipations de l'enseignante** | **Stratégies mathématiques/ facettes de la communication lors du retour**<br>Premier groupe: R | **Stratégies mathématiques/ facettes de la communication lors du retour**<br>Deuxième groupe : SÉ |
|---|---|---|
| - Pour la troisième équation ($\frac{5}{7} = \frac{(9+x)}{21}$), l'enseignante croit que ses élèves apprécieront davantage la solution de Pascal puisque cette dernière est fondée sur l'algorithme du produit-croisé, un algorithme que les élèves « maitrisent » bien, sans toutefois en saisir toujours le sens.<br>- Selon l'enseignante, à l'école en général, on travaille davantage les algorithmes de résolution plutôt que les raisonnements qui y sont sous-jacents.<br>- Elle croit aussi que plusieurs de ses élèves comprendront bien la méthode des « équations équivalentes » proposée par Mylène. Toutefois, cette dernière fait une erreur de distributivité qui risque « d'entacher » sa performance aux yeux des élèves. | - Elle demande aux élèves laquelle des deux stratégies ils ont le plus appréciée.<br>- Un élève répond Mylène, un autre Pascal.<br>- L'enseignante questionne l'élève à savoir pourquoi il a choisi Pascal. Il répond à cause du produit croisé.<br>- L'enseignante le relance : « Le produit croisé, pour toi, c'est quelque chose que tu comprends bien? Tu trouves que dans sa démarche chaque étape est bien expliquée ou il en manque? ».<br>- L'élève ne répond pas spécifiquement aux questions de l'enseignante, mais parle plutôt de l'erreur de distributivité.<br>- L'enseignante lui demande si la réponse de Pascal est bonne, l'élève répond par la négative.<br>- On bifurque vers la stratégie de Mylène en expliquant la mise en commun au même dénominateur.<br>- Elle compare la stratégie de Mylène avec celle qu'ils ont vue en classe : ils auraient multiplié par trois au départ.<br>- L'enseignante questionne à savoir pourquoi on peut retirer des dénominateurs identiques.<br>- Elle résume de manière un peu plus ostensive les deux stratégies et demande ensuite aux élèves de voter à nouveau sur leur préférence.<br>- L'enseignante termine en réitérant l'importance de laisser des traces des raisonnements. | - Elle demande aux élèves laquelle des deux stratégies ils ont le plus appréciée.<br>- Un élève mentionne Mylène, car elle a tout de suite mis au même dénominateur.<br>- Un autre indique son choix pour Mylène parce qu'elle a mis tous les détails et Pascal non.<br>- L'enseignante ramène les élèves : « Premièrement, laquelle des deux donne la bonne réponse? ». On répond Mylène.<br>- L'enseignante demande qu'est-ce qui ne fonctionne pas avec la résolution de Pascal ? Un élève : « Il a juste mis « x » en face du 7 »<br>- L'enseignante reformule : « c'est encore une fois un problème de distributivité ».<br>- Un élève mentionne que Mylène n'a pas tout écrit ses démarches non plus.<br>- L'enseignante : « Toi, tu aurais écrit quoi? ». L'élève : « une ligne de plus ». Une discussion sur l'indication d'une ligne avec le dénominateur 21 s'amorce alors et sur l'opération qui permet de l'annuler.<br>- On discute sur la stratégie de Pascal. L'enseignante explique la technique du produit croisé.<br>- Elle indique aussi : « il y en a même qui m'ont dit: Moi j'aime mieux la solution de Mylène mais j'aurais aimé ça qu'elle le mette sur le même dénominateur ».<br>- L'enseignante termine par : « la morale de l'histoire aussi, c'est qu'on laisse des traces de chacun de nos raisonnements pour la personne qui nous corrige. Est-ce que ça marche? » |

#### *4.2.5.1 Des retours séquencés qui permettent à l'enseignante de revenir sur des savoirs anciens*

Dans les deux groupes, l'enseignante a pris le temps d'organiser son retour en questionnant les élèves sur chacune des productions des élèves-fictifs. Pour chaque sous-question, elle offre la possibilité de débuter l'échange sur l'une ou l'autre des productions fictives en demandant aux élèves, premièrement, laquelle des productions ils ont le plus appréciée, et, deuxièmement, en sollicitant un élève pour qu'il explique sa prise de position. Par moments, elle accueille les réponses des élèves sans les compléter elle-même et invite d'autres élèves à renchérir.

Les retours sur les situations montrent que l'enseignante invitent les élèves à une analyse fine des stratégies des deux élèves-fictifs. Dans les interactions entre l'enseignante et les élèves, il paraît plus évident pour les élèves de nommer les objets et opérations mathématiques en jeu, contrairement, par exemple, à la situation de la *Balance*. Dans la présente situation, le langage algébrique est commun, connu et les élèves ont sous la main une technique de résolution relativement bien maîtrisée : ramener les termes avec les variables à gauche et les termes constants à droite (appelée la « *méthode des opérations inverses* »).

D'autre part, le travail sur la résolution d'équations est travaillé depuis plusieurs semaines avec l'enseignante. On peut penser que le moment didactique de cette situation en est un de réinvestissement sur une technique et que les élèves sont en mesure d'entrer dans un discours technologique sur les opérations et propriétés en jeu. Les échanges sont d'autant plus forts sur les objets mathématiques qu'ils ont à leur disposition les productions de deux élèves qui contiennent des erreurs ou des imprécisions. Par exemple, suite à la demande de l'enseignante de dire ce qui ne fonctionnait pas dans la stratégie de Pascal dans la sous-question c), des élèves sont capables de nommer le non-respect de la distributivité. Cette propriété est également ressortie dans la discussion autour de la stratégie de Mylène à la sous-question b). L'enseignante bénéficie des commentaires et des connaissances qui émergent pour réinvestir des savoirs algébriques qui sont travaillés depuis plusieurs mois.

Les interactions entre l'enseignante et les élèves sont orientées vers le formalisme des représentations utilisées. Par exemple, l'enseignante est notamment revenue longuement sur les différentes représentations des réponses personnelles des élèves qu'elle n'avait pas explicitement anticipées. Elle interagit avec les élèves sur la représentation symbolique des réponses repérées : en nombre décimal; en nombre décimal arrondi; en nombre décimal avec le symbole du périodique; en fraction et en nombre fractionnaire. L'enseignante invite les élèves à vérifier chacune des réponses dans l'équation pour leur faire réaliser l'imprécision d'une réponse en nombre décimal et aussi l'importance de recourir au symbole du périodique pour qualifier plus rigoureusement la réponse. Elle travaille ainsi les concepts de valeur exacte et de valeur rapprochée.

La vérification de la réponse par un retour à l'équation est aussi une occasion pour l'enseignante de travailler le contrôle syntaxique (Bednarz et Saboya, 2007; Saboya, 2010). D'une part, elle invite les élèves à substituer les réponses dans les trois équations pour vérifier la validité de celle-ci, à savoir si les transformations sur les quantités effectuées conservent l'égalité. D'autre part, elle relance souvent les élèves dans la recherche des erreurs des deux sujets-fictifs, les amenant ainsi à décoder les éléments de communication liés à l'organisation et à l'argumentation (« *pourquoi l'erreur s'est produite ?* ») pour espérer développer chez l'élève l'analyse de ses propres résolutions algébriques et, par conséquent, développer un meilleur contrôle syntaxique.

Dans son journal de bord, l'enseignante mentionne également que des élèves abandonnent la recherche des erreurs puisqu'ils ont adopté la résolution de l'un des élèves : *« j'ai remarqué que plusieurs élèves disaient ne pas comprendre les solutions proposées, mais ne cherchaient pas à identifier les erreurs « avec ardeur »* ». Ce constat de la part de l'enseignant rejoint l'un des résultats qui émerge de l'analyse de la situation de l'*Enseignant*. Ayant sous la main une stratégie canonique qui fonctionne tous le temps, certains élèves ne s'engagent pas dans la compréhension d'une autre stratégie (un peu comme s'ils sous-entendaient : « *à quoi bon, je connais une stratégie qui fonctionne* »).

*4.2.5.2 Les prises de position écrites semblent donner un accès privilégié à l'enseignante aux arguments*

L'enseignante se sert des arguments lus sur les copies des élèves pour travailler la validation. Par exemple, d'entrée de jeu, l'enseignante mentionne aux deux groupes à la sous-question b) qu'elle a trouvé intéressant lire leurs commentaires. Elle nomme que les commentaires sont plutôt partagés, mais que plusieurs choisissent la stratégie de Mylène. Elle les invite alors à justifier pourquoi. Par cette question ouverte, l'enseignante favorise la position de recherche et suscite des échanges pour développer la validation : la stratégie de Mylène est plus classique, mais Pascal arrive à la bonne réponse, etc. L'enseignante relance ensuite volontairement d'autres arguments qu'elle a repérés dans les productions pour maintenir la discussion : « *oui, mais Pascal lui ?* ». Et alors d'autres élèves prennent la parole et argumente que Pascal arrive lui à la bonne réponse, mais que les traces de la démarche sont imprécises.

Par ailleurs, il est intéressant de constater que les arguments des élèves sont majoritairement centrés sur la réponse exacte obtenue par l'un ou l'autre des élèves. Puisqu'à chaque fois les paires de solutions-fictives présentées montrent une bonne et une mauvaise réponse, les élèves invalident et rejettent la stratégie qui arrive à une fausse réponse. Ce constat diffère de ce qui est observé dans la situation de l'*Enseignant* où deux solutions-fictives non-canoniques, arrivant toutes deux à la bonne réponse, sont présentées. Les élèves validaient alors les stratégies plus finement en fondant leur argumentaire sur le formalisme en jeu, les pas de raisonnements laissés, l'organisation de la stratégie, etc.

Par contre, même dans la présente situation, des élèves n'ont pas rejeté la stratégie de Mylène à la sous-question bien qu'elle ait fait une erreur dans la mise en œuvre de la distributivité. L'erreur de Mylène amène des élèves à se prononcer en faveur de sa stratégie étant donné la démarche plus explicite et connue. Dans les interactions lors du retour, un élève dit, en parlant de la stratégie de Mylène à la sous-question b) : « *Parce que c'est plus clair à suivre. On voit les étapes qu'elle a faites* ». On peut penser que le type de tâche demandé dans cette sous-question a favorisé pour quelques élèves une prise de conscience sur l'importance de la démarche. L'enseignante corrobore d'ailleurs ce constat : « *Mes élèves ont mentionné à plusieurs reprises que les étapes de résolution n'étaient pas suffisamment précisées dans les solutions proposées. Il s'agit là d'une belle prise de conscience à mon sens* ».

*4.2.5.3 La stratégie de Pascal amène une prise de conscience de l'enseignante*

L'analyse montre que les élèves sont plutôt habitués à travailler avec la méthode de résolution « des opérations inverses » et qu'ils semblent moins ouverts à explorer d'autres raisonnements, notamment celui plus simple de Pascal à la sous-question b). Plusieurs rejettent sa stratégie puisqu'elle n'est pas développée de la manière dont ils l'ont apprise. Ce constat amène l'enseignante à une prise de conscience qu'elle verbalise, tant aux élèves, que dans son journal de bord.

Aux élèves elle dit :

> « *Mais on est tellement en train de se lancer dans nos affaires de gauche-droite, on veut toujours faire la même opération de chaque côté, que quand on arrive avec une situation très simple (référant ici à la stratégie de Pascal), très logique, on dirait qu'on n'est plus sûr si notre stratégie (référant à la méthode des opérations inverses) est bonne* »

Plus loin, aux élèves du groupe R, elle verbalise:

> « […] *je me suis aperçu que souvent on fait celle des opérations inverses puis on laisse un peu de côté cette stratégie de déduction* ».

Puis, dans son journal de bord, elle écrit :

> « *Il m'apparaît donc pertinent de toujours présenter plusieurs solutions possibles à mes élèves pour une même équation. Ainsi, je crois que cela augmentera le sens de la démarche aux yeux des élèves et évitera la simple application d'un algorithme* ».

Ainsi, la stratégie déductive de Pascal, plus simple, mais aussi rejetée par la plupart des élèves puisqu'elle ne correspond pas à la stratégie apprise, invite l'enseignante à questionner certains éléments de sa pratique d'enseignement de l'algèbre. Elle prend conscience de l'importance de confronter les élèves à plusieurs raisonnements de manière à ce qu'ils se distancent des algorithmes de résolution souvent restitués et dénués de sens.

Par ailleurs, l'enseignante voit aussi certaines modifications de variables, notamment un jeu sur le type de tâche demandé, pour enrichir la situation et du même coup son enseignement : « *J'aurais peut-être modifié la question en demandant d'identifier les erreurs dans les solutions. Plusieurs l'ont fait sans que cela ne soit demandé, mais certains auraient pu préciser davantage la justification de leur choix. J'ai remarqué que plusieurs élèves disaient ne pas comprendre les solutions proposées, mais ne cherchaient pas à identifier les erreurs « avec ardeur »*.

Elle voit aussi un prolongement à l'usage de ces situations pour les activités de révision de fin d'année tout en étant sensible à la façon d'animer les différentes stratégies qui émergeront: « *Ces mêmes situations pourraient être présentées à nouveau avec d'autres solutions et cela permettrait encore une mobilisation des savoirs (en particulier les équations équivalentes). Je veillerai, lors d'activités de révision, à faire proposer des pistes de solutions différentes par les élèves afin, d'une part, d'identifier la démarche que la majorité privilégie et, d'autre part, rejoindre aussi les élèves qui auraient choisi un chemin différent et mener à terme leur raisonnement* ».

*4.2.6 Synthèse des éléments de réponses à la deuxième question de recherche*

Rappelons tout d'abord la deuxième question de recherche.

**Q2 :** *Y a-t-il des éléments de communication laissés par les élèves, à la suite de leurs interactions dans les situations proposées, qui n'avaient pas été anticipés par l'enseignante et qu'elle a exploités lors des retours avec les élèves ? Si oui, comment sont-ils exploités? Peut-on dégager des apports didactiques de cette exploitation?*

L'analyse des retours montre plusieurs apports didactiques liés à l'exploitation des situations proposées par l'enseignante.

- L'enrichissement de l'enseignement : L'enseignante a enrichi son enseignement notamment en exploitant des stratégies non-anticipées pour créer, par exemple, des conflits cognitifs à partir d'erreurs, ou pour mieux saisir des raisonnements d'élèves. Elle a aussi pu revenir sur des savoirs anciens ou en introduire de nouveaux, par exemple en répondant au besoin des élèves d'avoir une stratégie algébrique dans la situation du *Magicien*.
- L'enrichissement des interactions en classe: Les prises de position écrites par les élèves, notamment lorsqu'ils adoptaient une posture d'enseignant, ont donné un accès privilégié à l'enseignante aux arguments invoqués pour justifier cette prise de position. Elle a ainsi pu animer un débat dans la classe afin obtenir les différents points de vue des élèves à propos de ces arguments. Les interactions sont d'autant plus riches dans une situation comme l'*Enseignant* où les deux solutions-fictives

arrivent à la bonne réponse, mais avec des stratégies différentes. Les interactions sont alors centrées sur les raisonnements plutôt que sur les réponses.

- <u>Des apprentissages pour l'enseignante issus de l'analyse des productions des élèves</u> : L'enseignante a consigné dans son journal de bord des réflexions orientant des actions pour l'avenir. Par exemple, travailler avec les élèves des stratégies non-canoniques pour favoriser le raisonnement et, dans le même esprit, enseigner différentes méthodes pour résoudre des équations et ne pas se restreindre à la méthode « classique ».

# CONCLUSION

Cette conclusion se veut une forme d'examen critique de la présente recherche. Dans un premier temps, nous revenons sur les contributions de cette thèse à la didactique des mathématiques. Dans un deuxième temps, nous identifions des limites à la recherche et, enfin, dans un troisième temps, nous développerons des perspectives qui permettraient des prolongements à nos travaux.

**Les principaux résultats de notre recherche**

À l'origine de cette thèse, la constatation selon laquelle la communication n'occupe pas la place qu'elle devrait avoir en classe de mathématiques. En effet, plusieurs recherches montrent qu'il est difficile pour les enseignants de s'engager dans un travail de communication orales ou écrites avec leurs élèves (Cobb, Bauersfeld, 1995; Anderson, D.S. et Piazza, J.A., 1996; Sierpinska, 1998; Bibby, 1999; Hufferd-Ackles, Fuson, K.C. et Gamoran-Sherin, 2004; Black, 2004; Giroux, 2004; Rauscher, 2006; Bruce, 2005, 2007). Pourtant, la communication est un élément indissociable de l'activité mathématique et de nombreux chercheurs voient des apports à son exploitation en classe de mathématiques (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont, 1980; Bishop, 1985; Rose, 1989; Borasi et Rose, 1989; Hiebert et Carpenter, 1992; Clarke et al. 1992; Bednarz, 1996; Brousseau, 1998; Waite, 2000; Goffard et Goffard, 2003; Giroux, 2004; Frempong, 2005; Bruce, 2007; Parrish, 2011; Richardson, 2011; Kemmerle, 2013; Boaler, 2014).

Ainsi, nous appuyant notamment sur la Théorie des situations didactiques pour modéliser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, nous avons cherché à adapter et à mettre à l'essai des situations en algèbre pour des élèves de 2e secondaire afin qu'ils déploient une communication en classe. Nous avions la préoccupation que ces situations puissent être utiles au travail des enseignants. Une séquence de six situations portant sur l'algèbre (principalement la mise en équation et la résolution d'équations) a ainsi été conçue.  Une analyse a priori des situations a permis de formuler des hypothèses quant au potentiel des choix de valeurs de variables didactiques effectués pour solliciter un travail de communication mathématique. Les situations ont d'abord été préexpérimentées afin de les améliorer au besoin. La préexpérimentation a donné lieu aussi au développement d'une grille permettant d'analyser la communication au sein de l'activité mathématique. Les situations ont par la suite été expérimentées auprès de deux classes afin de voir si elles sollicitaient une communication mathématique riche de la part des élèves.

Nous avons vu que l'exploitation des situations a effectivement permis le déploiement d'un travail de communication mathématique riche. Nous avons aussi vu l'influence du choix des valeurs des variables didactiques effectués sur cette activité. À titre d'exemple, la présentation de problèmes sans données numériques, avec des dessins et peu de mots, a suscité chez les élèves le recours à une variété de stratégies dans lesquelles ils mobilisent plusieurs registres de représentations.

Aussi, nous avons pu observer que la non-disponibilité d'une stratégie canonique ou connue semble peser sur l'exigence de formulation et tout en demandant à l'élève d'enrichir son discours, faute d'implicites partagés, avec son interlocuteur. Par contre, il ne faudrait pas en conclure que les élèves qui mobilisent une technique apprise ont un discours moins riche ou qu'ils restituent simplement des formulations mathématiques, sans en comprendre le sens. Ils peuvent y voir, à juste titre d'ailleurs, une économie ou une efficacité du discours et, donc, ne pas sentir le besoin d'expliquer le raisonnement sous-jacent à la technique. Cela risque d'être d'autant plus vrai lorsqu'ils s'adressent à leur enseignante puisqu'ils présument qu'elle comprend les raisonnements qu'ils mettent en jeu, et ils alors entrent moins dans un discours technologique.

Dans le même esprit, nous avons observé que, la position attribuée à l'élève et le jeu sur l'interlocuteur influencent le type d'argumentation déployée de même que l'organisation du discours. Ce résultat est particulièrement marqué lorsque l'élève est en position « d'enseignant-explicite » qui explique à des élèves-fictifs, position qui favorise une meilleure organisation et, surtout, une argumentation plus soutenue de la stratégie personnelle de l'élève (son référant pour analyser les copies-types). En effet, il appert que la position « d'élève-enseignant » joue sur la responsabilité de la validation du résultat assumée par l'élève et, en conséquence, sur le caractère a-didactique de la situation. Dans une situation où les élèves adoptent une posture d'enseignant, ces derniers cherchent à écrire leur « corrigé » et s'engagent dans la formulation de commentaires aux élèves-fictifs. Les élèves semblent souvent percevoir un réel enjeu et s'engagent ainsi à commenter les copies, tant en ce qui a trait à l'argumentation, qu'aux savoirs mobilisés ou à l'organisation des productions d'élèves-fictifs.

En effet, dans une situation où l'on demande à l'élève d'adopter une posture enseignante, il est invité à décoder des solutions d'élèves-fictifs et à les commenter. Son regard est alors moins porté sur la réponse des élèves-fictifs que sur leurs raisonnements. Son jugement se concentre ainsi sur l'argumentation, l'organisation, le formalisme en jeu dans les productions et les savoirs mathématiques mobilisés par les élèves-fictifs. Il s'éloigne d'une prise de position fondée uniquement sur la réponse adéquate. L'usage des registres mobilisés par les élèves-fictifs peut forcer l'élève-enseignant à relancer son propre raisonnement donnant ainsi aux situations de décodage de copies-types un caractère a-didactique.

Nous avons constaté par ailleurs que les problèmes avec peu de mots et sans données numériques, incitent les élèves à développer une stratégie personnelle qu'ils expliquent avec des registres de représentation qu'ils choisissent eux-mêmes. Conséquemment, ils argumentent et organisent davantage leurs raisonnements puisqu'ils manipulent des objets mathématiques avec lesquels ils sont plus à l'aise et ils ont souvent ainsi l'occasion d'effectuer un travail de traduction d'un registre (figuratif) à un autre de leur choix.

La mise à l'essai des situations visait aussi à voir si la communication ainsi générée pourrait offrir un matériau utile à l'enseignant pour rétroagir. Plus spécifiquement, il s'agissait de voir si l'enseignante exploitait des éléments de communication qu'elle n'avait pas anticipés et si des apports didactiques s'en dégageaient. Nous avons constaté que les situations ont permis, d'une part, à l'enseignante d'enrichir son enseignement en revenant sur plusieurs des stratégies d'élèves qu'elle n'avait pas anticipées au profit de ses groupes. Par exemple, des situations de première rencontre pour les élèves lui ont permis de répondre au besoin des élèves d'avoir un outil de généralisation performant pour résoudre le problème proposé. D'autre part, les situations ont également été porteuses puisqu'elles ont permis à l'enseignante certaines prises de conscience pour modifier son enseignement. En effet, elle a par exemple indiqué que les situations lui ont fait réaliser l'intérêt de travailler à partir de stratégies non-canoniques pour mieux saisir les différents raisonnements des élèves et les partager pour le bénéfice de l'ensemble du groupe. Elle a aussi mentionné qu'elle souhaite apporter des modifications à son enseignement pour montrer plusieurs stratégies pour résoudre des équations algébriques. Enfin, les prises de position écrites par les élèves, notamment lorsqu'ils adoptaient une posture d'enseignant, ont donné un accès privilégié à l'enseignante aux arguments invoqués pour justifier leur prise de position et l'ont invitée à relancer, pour des fins de débat, ces arguments dans la classe pour travailler des éléments de validation avec les élèves.

Finalement, mentionnons que la grille développée pour analyser les productions écrites des élèves peut être exportée au-delà de la présente recherche et s'avérer utile au travail des enseignants qui souhaitent développer la communication avec leurs élèves. En effet, on pourrait imaginer qu'un enseignant utilise la grille comme un outil qui, en identifiant des éléments de communication à travailler, contribue à préparer la rétroaction à donner à ses élèves, et ce, tout en leur montrant, sur une séquence de situations, leur progression par rapport à certains critères. La grille finale constitue donc, en elle-même, un résultat de recherche et cette grille pourra être améliorée au fur et à mesure de la pratique enseignante. De plus, bien que cette grille ait été développée pour analyser le travail de communication en algèbre, elle pourrait être adaptée afin de répondre aux spécificités de certains domaines des mathématiques. Par exemple, en géométrie, on pourrait imaginer que la section relative aux différents registres pourrait être élaborée davantage afin de permettre de mieux mettre en évidence l'importance du travail sur les figures.

**Limites au projet de recherche**

Un certain nombre de limites doivent être considérées dans le cadre de cette recherche. À partir de l'échantillon de deux classes regroupant environ 60 sujets, nous avons dégagé des hypothèses quant à des valeurs de variables qui semblent favoriser la communication au sein de l'activité mathématique. Pour généraliser ces hypothèses, il serait pertinent de mettre à l'essai les situations sur un plus grand échantillon d'élèves et de faire une nouvelle analyse des résultats qui s'en dégageraient.

De plus, les outils méthodologiques utilisés dans le cadre de cette recherche auraient pu être améliorés de manière à raffiner nos observations des interactions entre les élèves, notamment lors du travail dyadique. En effet, la cueillette des données ne reposant que sur un enregistrement audio, il était impossible de considérer la communication gestuelle et para-verbale des élèves pendant la réalisation des situations. Une captation vidéo du travail dyadique aurait sans doute été plus révélatrice.

Il aurait aussi pu être pertinent d'enrichir les données par des entrevues de certains sujets afin qu'ils expliquent à l'oral leurs raisonnements venant ainsi bonifier leurs raisonnements écrits.

Il appert aussi que certaines situations proposées aux élèves gagneraient à être modifiées afin de permettre de générer une communication plus riche de la part des élèves que celle que nous avons observée. Par exemple, dans les sous-questions de la situation de la *Balance* qui demandaient à l'élève « *peux-tu comparer…* », il serait plus judicieux d'utiliser la formulation « *compare…* », évitant ainsi quelques réponses se limitant à « oui » ou « non ». Aussi, dans la situation du *Déménagement*, il serait plus opportun de formuler une question plus générale qui n'oriente pas le regard des élèves sur les « manques » de l'élève-fictif, mais ouvre la possibilité de commenter et prendre position sur ses forces. Enfin, dans la situation des *Équations*, l'argumentaire des élèves étant fortement teinté par la réponse des élèves-fictifs, il serait plus adéquat de proposer deux productions fictives qui arrivent à une bonne réponse à partir de démarches différentes. Ainsi, cette modification forcerait l'analyse des deux démarches et éloignerait les élèves d'une prise de position à partir seulement de la réponse.

**Perspectives et prolongements de la recherche**

Les résultats de la recherche ont montré des apports, découlant de la mise en œuvre de situations de communication en algèbre, tant pour l'élève que l'enseignant. Il serait pertinent de poursuivre des études visant à questionner comment les valeurs de variables qui semblent favoriser la communication et les interactions en classe pourraient être transférables dans d'autres domaines mathématiques comme la géométrie ou l'arithmétique. De nouvelles situations, jouant sur les valeurs des variables didactiques qui sont apparues avoir une influence positive pour développer la communication, pourraient être conçues et mises à l'essai dans des classes du primaire, comme du secondaire.

Par ailleurs, on pourrait aussi se demander comment les technologies numériques pourraient outiller l'enseignant dans la mise à l'essai de nouvelles situations de communication avec les élèves et l'aider à rétroagir de manière efficiente. Par exemple, en plaçant les élèves en position d'enseignants, devant une production fictive projetée au TNI, l'enseignant pourrait recevoir, via une application telle que *Mentimeter*, les commentaires et prises de position des élèves-enseignants en direct. Il pourrait aussi y réagir de différentes manières à l'aide d'applications qui permettent d'enregistrer la voix (*Talk and Comment*), de former des banques de commentaires (*Google Classroom*; *CheckMark*), d'enregistrer des commentaires audios appuyés de supports visuels (telle que la copie numérisée de l'élève; *Screencastify*) ou de questionner de manière interactive les élèves (*Kahoot*; *Mentimeter*). L'étude des apports didactiques de tels outils sur l'efficience de la rétroaction de l'enseignant et sur les savoirs mathématiques développés par les élèves serait pertinente.

Dans la problématique, nous avions également soulevé une préoccupation à propos des élèves issus des milieux défavorisés ou pluriethniques dont la culture première est différente de la culture scolaire et des attentes, implicites ou explicites, que l'École a à leur endroit. À cause de cet écart de culture, certains de ces élèves n'osent pas prendre la parole en classe et, de ce fait, offrent peu d'occasions à l'enseignant d'accéder à leurs raisonnements. L'enseignant ne peut alors aussi bien les aider à comprendre et à apprendre les mathématiques. Cette difficulté pose alors la question des moyens à mettre en place, dans une perspective de justice sociale, pour assurer que tous les élèves aient les mêmes chances de s'exprimer en classe de mathématiques et, par conséquent, aient les mêmes chances de réussir. Est-ce que les valeurs des variables qui ont semblé jouer un rôle dans le travail de communication mathématique des élèves avec lesquels nous avons expérimenté constitueraient des leviers adéquats pour encourager l'expression de tous les élèves, incluant ceux qui semblent a priori moins enclins à s'exprimer en classe? Dans cette optique, les travaux américains sur les causeries mathématiques (Parrish, 2011; Richardson, 2011; Boaler, 2015) semblent porteurs pour assurer une plus grande équité dans la prise de parole de tous les élèves en classe.

Enfin, une collaboration entre la didactique du français et la didactique des mathématiques pourrait être intéressante afin de mettre à contribution les travaux de la didactique de l'oral réflexif pour l'étude des interactions orales en classe. On recense en effet des études sur la fonction heuristique de certaines conduites langagières comme l'explication, la justification ou l'argumentation dans la construction des connaissances en classe de sciences (Buty et Plantin, 2008; Jaubert, 2007) ou de mathématiques (Tauveron et Guillaume, 1998). Les travaux récents en didactique du français portant sur ces conduites pourraient certainement nous permettre de poursuivre l'étude des interactions en classe de mathématiques en nous appuyant sur les cadres développés. Nous pourrions aussi nous inspirer de certains dispositifs tels que les groupes de révision rédactionnels, les cercles de discussion (Hébert et Lafontaine, 2015) ou les dictées métalinguistiques (Nadeau et Fisher, 2014) afin de concevoir et mettre à l'essai des outils auxquels pourraient recourir les enseignants pour contribuer à développer l'argumentation des élèves en classe de mathématiques.

## BIBLIOGRAPHIE


Adihou, A. 2003. *Étude des phénomènes didactiques liés à la méthode de résolution de problèmes arithmétiques par la mise en équations en 9ème secondaire, Thèse de doctorat*. Université de Genève.

Anderson, D.S. et Piazza, J.A. 1996. *Changing beliefs: Teaching and learning mathematics in constructivist preservice classrooms*. Action in Teacher Education, 17(2). pp. 51–62.

Artigue, M. 1988. *Ingénierie didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 9/3. pp. 281-308.

Bakhtine, M. 1968. *Dostoevskij: poetica e stilistica*. Piccola Biblioteca. pp. 115-116.

Balacheff, N. 1987. *Processus de preuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics. N°18. pp. 147-176.

Balacheff, N. 1988. *Une étude épistémologique du processus de preuve en mathématiques au collège*. Thèse présentée à l'Université National Polytechnique, Grenoble.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. et Lepage, A. 1992. '*Arithmetical and algebraic thinking in problem solving*', in W. Geeslin and K. Graham (eds.), Proceedings of the 16th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Vol. 1. New Hampshire, USA. pp. 65–72.

Bednarz, N. 1994. *The Emergency and development of algebra in a problem solving context : a problem analysis*. Proceedings of the XVIII PME, Lisbon. Vol. 2. pp. 64-71.

Bednarz, N. 1996. *Language activity, conceptualization and problem solving : the role played by verbalization in the development of mathematical thought in young children*. In: Mathematics for Tomorrow's Young Children. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. pp.228 à 247.

Bednarz, N. et Janvier, B. 1996. *Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic*. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. pp. 115-136.

Bednarz, N. et Saboya, M. 2007. *Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire*. Dans J. Giroux, D. Gauthier (dirs.). Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne. Montréal: Éditions Bande Didactique. pp. 139-166

Benveniste, E. 1974. *Problèmes de linguistiques générales*. Paris. Gallimard.

Bergeson, T., Fitton, R., Bylsma, P., Neitzel, B. et Stine, M-A. 2000. *Teaching and Learning Mathematics: Using Research to Shift From The "Yesterday" Mind to the "Tomorrow" Mind*. State Superintendent of Public Instruction. Washington.

Bibby, T. 1999. *Subject knowledge, personal history and professional change*. Teacher Development 3(2). pp. 219-232.

Bibeau, G. 1982. *L'éducation bilingue en Amérique du Nord*. Collection Langue et Société, 4. Montréal, Québec, Canada. Guérin.

Bishop, A. 1985. *The Social Construction of Meaning - A Significant Development for Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics. Vol. 5. pp. 24–28.

Blais, M. et Martineau, S. 2006. *L'analyse inductive générale: Description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes*. Recherches Qualitatives. 26 p.

Black, L. 2004. *Teacher-Pupil Talk in Whole Class Discussions and Process of Social Positioning within* *the Primary School Classroom*. *Language and Education*, 18 (5), pp. 347–360.

Bloch, I. 2009. *Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves : comment travailler leur pertinence en formation ?* Petit x. No. 81. pp. 25-53.

Blum, W. et Niss, M. 1991. *Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction*. Educational Studies in Mathematics, 22 (1). pp. 37-68.

Boaler, J. 2015. *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. John Wiley & Sons.

Boivin et al., 2006. Panoramath, 1er cycle du secondaire. Manuel B. Volume 2. Les Éditions CEC. 222 p.

Borasi, R. et Rose, B. 1989. *Journal Writing and Mathematics Instruction*. Educational Studies in Mathematics, November. Vol.20. pp.347–365.

Booth, L. 1984. *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: NFER-NELSON.

Bresson, F. 1987. *Les fonctions de représentation et de communication*. Psychologie (Editions Piaget, Mounoud, Bronckart). Encyclopédie de la Pléiade. pp. 933-982.

Brousseau, G. 1986. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Université Sciences et Technologies – Bordeaux I. N° 894; Doctorat d'Etat ès sciences. 906 p.

Brousseau, G. 1988. *Les différents rôles du maître*. Conférence prononcée à l'UQAM, Québec, Canada. Bulletin de l'Association mathématique du Québec, 2(23). pp. 14-24.

Brousseau, G. 1990. *Le contrat didactique, le milieu*. Recherches en Didactique des Mathématiques. No. 9. Vol. 3. pp. 309-336.

Brousseau, G. 1997. *La théorie des situations didactiques*. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. Montréal. [En ligne].

Brousseau, G. 1998. *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990)* Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. Éditions La pensée sauvage. Grenoble. 395 p.

Brousseau, G. 2010. *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. [En ligne]

Brousseau, G. et Warfield, V. M. 1999. *The Case of Gaël. The Study of a Child with Mathematical Difficulties*. The Journal of Mathematical Behavior, 18(1). pp. 7-52.

Bruce, C. 2005. *Teacher candidate efficacy in mathematics: Factors that facilitate increased efficacy*. In Lloyd, G.A.,Wilson, S., Wilkins, J.L.M. & Behm, S.L. (Eds.), Proceedings of the twentyseventh. Psychology of Mathematics Association-North America.

Bruce, C. 2007. *L'interaction entre élèves dans un cours de mathématiques: compétition ou échange d'idées ?* Texte paru comme monographie dans Faire la différence…De la recherche à la pratique. Le Secrétariat de la littératie et de la numératie. Ministère de l'Éducation de l'Ontario.

Buty, C. et Plantin, C. 2008. *Argumenter en classe de sciences : du débat à l'apprentissage*. Lyon : INRP.

Caron, F. et René de Cotret, S. 2007. *Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques: genèse d'une perspective*. Actes du colloque GDM 2007. La didactique des mathématiques au Québec : genèse et perspectives. Université de Montréal. pp. 123 à 134.

Charnay, R., Douaire, J et Valentin, D. 1998. *Formuler, critiquer et argumenter en mathématiques : un exemple au CM1*. In Repères. Recherches en didactique du français langue maternelle. No. 17. pp. 139-148

Chevallard, Y. 1985. *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage. Grenoble, deuxième édition augmentée. 1991. 240 p.

Chevallard, Y. 1989. *Arithmétique, algèbre, modélisation : Étapes d'une recherche*. IREM d'Aix-Marseille, n°16.

Chevallard, Y. 1991a. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. France. La Pensée Sauvage, 240 p.

Chevallard, Y. 1991b. *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 12/1. pp. 73-112.

Chevallard, Y. 1998. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (éd.). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Actes de l'université d'été. Clermont-Ferrand : IREM.

Clapponi, P. 1992-1993. Problème de la balance, d'après une idée de Serge Cecconi, Petit X. p. 32.

Clarke, D., Stephans, M. et Waywood, A. 1992. *Communication and the Learning of Mathematics*. In T. Romberg (Ed.) Mathematics Assessment and Evaluation. Albany (NY): State University of New York Press.

Cobb, P. et Bauersfield, H.. 1995. Introduction: *The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education*. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. pp. 1–16.

Cogis, D. 2005. *Pour enseigner et apprendre l'orthographe : nouveaux enjeux, pratiques nouvelles, école-collège*. Paris : Delagrave.

Conne, F. 1992. *Savoir et connaissances dans la perspective de la transposition didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 12. No. 3. Grenoble. La Pensée Sauvage. pp. 1-10.

Conne, F. 1999. *Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne*. In F. Conne et G. Lemoyne (dir.). Le cognitif en didactique des mathématiques. Montréal. Les Presses de l'Université de Montréal. pp. 31-69.

Coppé, S. 1998. *Composantes privées et publiques du travail de l'élève en situation de devoir surveillé en mathématiques*. Educational studies in mathematics, 35 (2). pp. 129 – 151.

Coulange, L. 2001. *Activité du professeur dans l'enseignement des systèmes d'équations en classe de troisième*. RDM, 21(3). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Coupal, M. 2006. *À vos maths*. Vol. C. Éditions Graphicor.

Cuadrado I. et Fernández, I. 2007. *La métacognition de la communication didactique dans l'enseignement secondaire espagnol*. Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle, 2007/4 (Vol. 40), pp. 81-106.

De Serres, M. et Groleau, J.D. 1997. *Mathématiques et langages*. Montréal. Collège Jean-de-Brébeuf. Direction pédagogique. Service de la recherche.

Demers, S. et Radford, L. 2004. *Communication et apprentissage : repères conceptuels et pratiques pour la classe de mathématiques*. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. 206 p.

De Serres, M., Groleau, J-D. 1995. *Erreurs de langage en mathématiques*. Tiré des Actes du Colloque 1995 de l'Association de la recherche au collégial (ARC). pp. 87-94.

Dias, T. 2014. *Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves*. La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation. No. 65. pp. 161-161.

Duval, R. 1991. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. Educational Studies in Mathematics. 22. pp 233-262

Duval, R. 1993. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. pp. 37-65.

Duval, R. 1995. *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval R., 2000. *Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques*. Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 20, n°2.

Falle, J. 2004. *Let's talk maths: A model for teaching to reveal student understandings*. Australian Senior Mathematics Journal 18 (2). pp. 17-27.

Fasel-Lauzon, V. 2014. *Comprendre et apprendre dans l'interaction : les séquences d'explication en classe de français langue seconde*. Bruxelles : Peter Lang.

Filloy, E. et Rojano, T. 1989. '*Solving equations: The transition from arithmetic to algebra'*, For the Learning of Mathematics, Vol. 9, No. 2. pp. 19-25.

Forest, D. 2006. Analyse proxémique d'interactions didactiques. Armand Colin. Carrefours de l'éducation. No. 21. pp. 73 à 94.

Forget, M-H et Gauvin, I. 2017. *La conduite de justification orale dans et pour l'apprentissage de la grammaire en classe de langue au primaire québécois*. In. L'oral aujourd'hui : perspectives didactiques. Dir Roxane GAGNON, Jean-François DE PIETRO, Carole FISHER. pp. 43-65.

Frempong, G. 2005. Exploring *Excellence and Equity within Canadian mathematics classrooms*. Dans Chick, H. L. et Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2. Melbourne: PME. pp. 337-344.

Gehlen, A. 1988. *Man. His nature and place in the world.* New York: Columbia University Press.

Gerard, F-M. 2007. *La complexité d'une évaluation des compétences à travers des situations complexes : nécessités théoriques et exigences du terrain*. Actes du Colloque international *Logique de compétences et développement curriculaire : débats, perspectives et alternatives pour les systèmes éducatifs*. Montréal. Observatoire des Réformes en éducation (ORÉ). 26 et 27 avril 2007.

Gerard, F-M. et Van Lint-Muguerza, S. 2000. *Quel équilibre entre une appréciation globale de la compétence et le recours aux critères ?* In : Bosman, C., Gerard, F-M., Roegiers, X (Éds). *Quel avenir pour les compétences ?* De Boeck Université. Bruxelles. pp. 135-140.

Giaquinto, M. 2005. *Mathematical activity*. In Paolo Mancosu, Klaus Frovin Jørgensen & S. A. Pedersen (eds.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Dordrecht: Springer. pp. 75-87.

Giroux, J. 2004. *Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire*. In Revue des sciences de l'éducation. Volume 30. Numéro 2. pp. 303-327.

Giroux, J. et René de Cotret, S. 2001. *Le temps didactique en classe de doubleurs*. In L'éducation au tournant du nouveau millénaire, Actes du Sixième congrès des sciences de l'éducation de langue française (AFDEC), Les publications de la Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal, Montréal. pp. 41-71.

Glaeser, G. 1973. *Le livre du problème, fascicule 1, Pédagogie de l'exercice et du problème.*

Goffard, M, et Goffard, S. 2003. *Interaction entre élèves et resolution de problems*. Interactions langagières 1, INRP- Redaction d'ASTER. No. 37. pp. 165-187.

Granger, G. 1979. *Langages et Épistémologie*. Paris. Klinksieck.

Hadamard, J. 1954. *The psychology of invention in the mathematical field*. New York. NY: Dover Publications.Poincaré, H. (1952). Science and method. New York, NY: Dover Publications, Inc.

Hall, E.T. 1963. *A system for a notation of proxemic Behavior*. American Anthropologist, 65. pp.1003-1025.

Harvey, S. et Loiselle, J. 2007. *La recherche développement en éducation : fondements, apports et limites*. In. Recherches qualitatives. Vol. 27(1). pp. 40-59.

Haas, G. et Maurel, L. 2003. *La controverse linguistique: une entrée dans l'analyse morpholexicale*. Repères, 28. pp. 13-26.

Healy, L. et Hoyles, C. 2000. *A Study of Proof Conceptions in Algebra. Journal for Research in Mathematics Education*. 31(4). pp. 396-428.

Hébert, M. et Lafontaine, L. 2015. *Quelques effets de l'enseignement de l'oral en situation de cercles de lecture*. Québec français. Numéro 174. pp. 19–20.

Hiebert, J. et Carpenter, T. 1992. *"Learning and Teaching with Understanding."* In D.Grouws (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan.

Hitt, F. 1998b. *Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 6. pp. 7-26.

Hitt, F. 2003. *Le caractère fonctionnel des représentations*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 8. pp. 255-271.

Hitt, F. 2006. *Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique*. Revue des sciences de l'éducation. Volume 30. Numéro 2. pp. 329-354

Hoyles, C. 2008. *Technology and mathematics education*. 11th International Congress on Mathematical Education (ICME). Mexico.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., et Gamoran-Sherin, M. 2004. Describing levels and components of a math-talk learning community. Journal of Research in Mathematics Education, 35(2). pp 81–116.

Jaubert, M. 2007. *Langage et construction de connaissances à l'école : un exemple en sciences*. Pessac: Presses universitaires de Bordeaux.

Jonnaert, P. 2002. *Compétence et socioconstructivisme – Un cadre théorique*. Éditions De Boeck Université. Bruxelles. 91 p.

Jonnaert, Ph., Barrette, J., Boufrahi, S. et Masciotra, D. 2004. *Contribution critique au développement des programmes d'études : compétences, constructivisme et interdisciplinarité*. Revue des sciences de l'éducation. Vol. XXX. No. 3. pp. 667-696.

Kibler, J., Barker, L., et Cegela, D. 1970. "*A Rationale for Using Behavioral Objectives in Speech Communication Instruction*". Lama Teacher. pp. 245-256.

Kemmerle, M. 2013. *Promoting Student Questions in Mathematics Classrooms*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp. 1004-1011.

Labrosse, P. 2004. *L'évaluation de la compétence à résoudre des problèmes en mathématiques : une approche basée sur le portfoli*o. Mémoire de maîtrise. 264 p.

Laparra, M et Margolinas, C. 2010. *Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement*, Pratiques [En ligne]. pp. 145-146.

Larousse. 2009. *Dictionnaire Le Petit Larousse illustré*. Paris.

Leblanc, M. 2011. *Étude de situations de validation en algèbre vécues par des élèves de 13 et 14 ans à l'aide et sans l'aide d'un forum électronique*. Thèse de doctorat. Université de Montréal. 406 p.

Le Boterf, G. 1994. *De la compétence : essai sur un attracteur étrange*. Les Éditions d'Organisation. Paris.

Legendre, M-F. 2004a. *De la difficulté à opérationnaliser les compétences dans les plans d'études : quelques éléments de réflexion à partir de l'expérience québécoise*. No 7121. Atelier 6-7e biennale de l'éducation et de la formation. Lyon.

Legendre, M-F. 2004b. *Cognitivisme et socioconstructivisme : des fondements théoriques à leur utilisation dans l'élaboration et la mise en œuvre du nouveau programme de formation*. In : Jonnaert, P., et M'Batika, A. (dir). Les réformes curriculaires. Regards croisés. Québec. Presses universitaires du Québec.

Legendre, R. 1993. *Dictionnaire actuel de l'éducation*. 2e édition. Montréal. Guérin.

Margolinas, C. 1993. *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*. Éditions. La Pensée Sauvage. Grenoble. 255 p.

Margolinas, C. 2004. *Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Université de Provence.

Mary, C. 1999. *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat. Université de Montréal, Montréal.

Matheron, Y. et Mercier, A. 2005. *Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels*. *Revue des sciences de l'éducation,* XXX. pp. 355-377.

Mercier, A. 1992. *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse, Université de Bordeaux I, nº 846. 701 p.

Mercier, A. 2001. *Le temps didactique*. *Brèves de concours*. Site de la Recherche de l'IUFM d'Aix-Marseille [En ligne].

Michaud, B., et Michaud, D. 1986. *L'expression et la Formation par l'ordinateur : une méthode universelle de scénarisation interactive*. Montréal: Vézina.

Ministère de l'Éducation de l'Alberta. 2007. *Mathematics kindergarten to grade 9. Alberta*.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. 2005. *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année.* Mathématiques. Ontario.

Ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick. 2000. *Programme d'études mathématiques : 8e année.* Document provisoire. Nouveau-Brunswick.

Ministère de l'Éducation nationale de l'enseignement supérieur et de la recherche. 2006. *Le socle commun de connaissances et de compétences*. France.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec, 2003. *Programmes d'études secondaires en mathématiques*. Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec, 2006. *Politique d'évaluation des apprentissages – Être évalué pour mieux apprendre.* Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec, 2011. *Cadre d'évaluation des apprentissages*. Mathématique. Premier et deuxième cycle. Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec, 2016. Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique. Québec.

Ministère de la Communauté française de Belgique. 2000. *Socles de compétences. Formation mathématique*. Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique. Belgique.

Nadeau, M. et Fisher, C. 2014. *Expérimentation de pratiques innovantes, la dictée 0 faute et la phrase dictée du jour, et étude de leur impact sur la compétence orthographique des élèves en production de texte*. Rapport de recherche FRQSC.

Nelson K. 1988. *El descubrimiento del sentido. La adquisición del significado compartido*. Madrid : Alianza,

Niss, M. 1999. *Competencies and subject description*. Uddanneise. pp. 21-29.

Noirfalise, R. 1991. *Connaissances ou capacités*. Repères, Revue des IREM, No. 5. Octobre 1991, pp. 5-22.

OCDE. 2003. *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*. OCDE. Paris.

Odier-Guedj, D. 2019. *Favoriser l'interaction*. Université du Québec à Montréal. [En ligne].

Olteanu, L. 2014. *Effective communication, critical aspects and compositionality in algebra*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45:7. pp. 1021-1033.

Parrish, S. 2011. *Causeries mathématiques! Construire le raisonnement mathématique*, traduction de Dominique Burns pour École Montréalaise pour tous, d'après Number Talks build numerical reasoning, dans Teaching Children Mathematics, NCTM.

Perrenoud, P. 1999. *L'école saisie par les compétences*. Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation. Université de Genève.

Perrenoud, P. 1999a. *Construire des compétences, tout un programme !* Entrevue donnée à la revue Vie pédagogique. Dossier faire acquérir des compétences à l'école. Septembre-octobre. pp. 16-20.

Piaget, J. 1968. *La formation du symbole chez l'enfant*. Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

Pimm, D. 1987. *Speaking Mathematically: communication in Mathematics Classrooms*. Routledge and Kegan Paul. London and New York. 217 p.

Pirie, S. 1998. *Crossing the Gulf between Thought and Symbol: Language as (Slippery) Stepping-Stones*. In Language and Communication in the Mathematics Classroom. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. pp. 7- 29.

Radford, L. et Grenier, M. 1996. *Entre les choses, les symboles et les idées… une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre*. Revue des sciences de l'éducation, 22(2). pp. 253-276.

Radford, L. 2008. *Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings*. Springer Science + Business Media B.V. pp. 111-126.

Rausher, J-C. 2006. *Écriture réflexive et activité mathématique : le cas de la résolution de problèmes de proportions*. Annales de didactique et de sciences cognitives. Vol. 2. IREM de Strastbourg. pp. 75-102.

René de Cotret, S. 2000. *Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits*. Neuvième Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre (SFIDA), Nice. pp. IX-23 à IX-37.

René de Cotret, S. 2013. *Un sujet multiple, de multiples sujets…et autant de milieux?* Communication présentée au congrès du GDM, Val d'Or, Québec.

René de Cotret, S. 2014. *Espaces de travail/espaces de connaissances: Peut-on imaginer une navette pour y voyager?*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,17 (4-2), 401-416.

René de Cotret, S. et Fiola, A. 2007. *Une adaptation de l'environnement informatisé Bouchons les trous pour des élèves en difficulté d'apprentissage*. In J. Giroux et D. Gauthier (dir.). Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Montréal : Éditions Bande Didactique.

Richardson, K. 2011. *What is the distinction between a math lesson and a number talk?* Math Perspectives Teacher Development Center. [En ligne].

Roegiers, X. 1999. *Savoirs, capacités et compétences à l'école : une quête de sens*. Forum-pédagogie. Mars 1999. pp. 24-31.

Roegiers, X. 2000. *Une pédagogie de l'intégration. Compétence et intégration des acquis dans l'enseignement*. Éditions De Boeck Université. Bruxelles. 304 p.

Roegiers, X. 2003. *Des situations pour intégrer les acquis scolaires*. Éditions De Boeck Université. Bruxelles. 276 p.

Rose, B. 1989. *Writing and Mathematics: Theory and Practice*. In P. Connolly and T.Vilardi (Eds.) Writing to Learn Mathematics and Science. New York: Teachers College Press.

Rouchier, A. 1996. *Connaissances et savoirs dans le système didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 16. No. 2. Grenoble. La Pensée Sauvage. pp. 177-197.

Saboya, M. 2010. Élaboration et analyse d'une intervention didactique coconstruite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

Saboya, M., Bednarz, N., Hitt, F. 2015. *Le contrôle exercé en algèbre: conceptualisation et analyses en résolution de problèmes*. Annales de didactique et de sciences cognitives. 20. pp. 61-100.

Scallon, G., 2004. *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*. ERPI : l'école en mouvement. Saint-Laurent. 342 p.

Schubauer-Leoni, M.-L. et Perret-Clermont, A-N. 1980. *Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs*. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 1. No. 3. pp. 297-350.

Secrétariat de la littératie et de la numératie. 2011. *L'art de questionner de façon efficace : susciter la réflexion des élèves et approfondir la compréhension conceptuelle des mathématiques*. Ministère de l'éducation de l'Ontario. [En ligne].

Sensevy, G. 1998. *Institutions didactiques : étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris : Presses Universitaires de France.

Sensevy, G., Forest, D., Barbu, S. 2005. *Analyse proxémique d'une leçon de mathématiques : une étude exploratoire*. In Revue des sciences de l'éducation, Volume 31, Numéro 3, pp. 659-686. [En ligne] [Page consultée le 11 juillet 2016].

Sfard, A. 2008. *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. 1995. *La compréhension en mathématiques*. Mont-Royal: Modulo Éditeur.

Sierpinska, A. 1998. *Three Epistemologies, Three Views of Classroom Communication : Constructivism, Sociocultural Approches, Interactionism*. In Language and Communication in the Mathematics Classroom. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia. pp. 30 à 62.

Schmidt, S. 1994. *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes*. Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal.

St-Cyr, C. 2013. *La dimension langagière dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : une étude exploratoire*. Mémoire de maîtrise. Université de Regina. 190 p.

Stegen, P., 2004. Un triangle qui grandit…un outil pour aborder les suites numériques à l'école primaire. RMT. Tome 2. pp. 21-34.

Tallet, C. 2003. *« Faut pas imaginer, faut voir la réalité » - Rémi (9 ans) ou Comment les activités métalinguistiques peuvent-elles aider les élèves à passer d'une écriture inventée à une analyse formelle de la langue ? Le cas de l'accord sujet-verbe chez les enfants de CE2*. Repères, 28. pp. 27-46.

Tauveron, C. et Guillaume, J.-C. 1998. *La justification en mathématiques au CM : comparaison du début et de la fin d'un cycle d'apprentissage*. Repères, 17. pp. 149-176.

Timmermans, A. C., et Rubie-Davies, C. M. 2018. *Do teachers differ in the level of expectations or in the extent to which they differentiate in expectations? Relations between teacher-level expectations, teacher background and beliefs, and subsequent student performanc*e. Educational Research and Evaluation, 24 (3-5). pp. 241-263.

Tobias, S. 1978. *Overcoming math anxiety*. Boston, Massachusetts: Houghton Mifflin Company.

Van der Maren, J-M. 1996. *Méthode de recherche pour l'éducation (2e édition).* De Boeck Université. Bruxelles. 502 p.

Van Dormolen, J. 1977. *Learning to Understand What Giving a Proof Really Means*. Educational Studies in Mathematics. Vol. 8. pp. 27-34.

Vergnaud, G. 1990. *La théorie des champs conceptuels*. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), pp. 133-170.

Vergnaud, G. 1991. *Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques*. *Revue Française de pédagogie* (96). pp. 79-86.

Vergnaud, G. 1998. *Au fond de l'action, la conceptualisation*. In J.M. Barbier (dir.), Savoirs théoriques et savoirs d'action. pp. 275-291. Paris: Presses universitaires de France (1re éd. 1996).

Vergnaud, G. 2001. *Les schèmes selon Vergnaud*. [En ligne].

Vlassis, J. et Demonty. I. 2000. *Apprendre à résoudre des équations*. Synthèse de la recherche en pédagogie. N°231/98. Informations pédagogiques. N°50. pp. 35 à 42.

Vygotski, L. *Pensée et* Langage. Éditions La Dispute. 1997.

Waite, R. D. 2000. *A study of the effects of Everyday Mathematics on student achievement of third, fourth, and fifth-grade students in a large north Texas urban school district*. Dissertation Abstracts International. 61(10). pp. 1-155.

Wertsch J.V. 1993. *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Madrid : Aprendizaje/Visor.

Wertsch J.V. 1988. *Mind as action*. Nueva York : Oxford University Press.

## Annexe 1 - Les trois compétences disciplinaires ministérielles (MÉLS, 2003)

*Figure 51 - La compétence Résoudre une situation-problème et ses composantes tirée du programme de formation du MÉLS (2003, p. 241)*

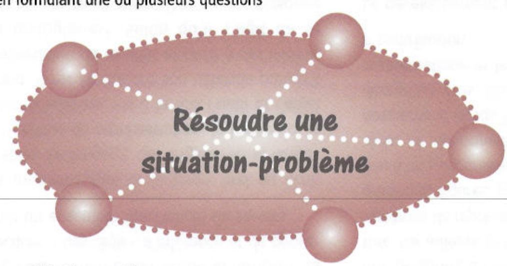
### Compétence 1 et ses composantes

**Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique**

Dégager l'information contenue dans divers modes de représentation : linguistique, numérique, symbolique, graphique • Déterminer les données manquantes, supplémentaires ou superflues, si nécessaire • Cerner et décrire la tâche à accomplir en ciblant la question posée ou en formulant une ou plusieurs questions

**Représenter la situation-problème par un modèle mathématique**

Associer à la situation-problème un modèle mathématique adéquat • Comparer, au besoin, la situation à des problèmes semblables résolus antérieurement • Reconnaître des similitudes entre des situations-problèmes différentes • Passer d'un mode de représentation à un autre et formuler des conjectures




**Élaborer une solution mathématique**

Utiliser des stratégies appropriées en s'appuyant sur des réseaux de concepts et de processus • Décrire le résultat attendu en tenant compte de la nature des données liées à la situation • Estimer, s'il y a lieu, l'ordre de grandeur du résultat • Organiser les données retenues • Confronter ces données avec celles de la situation et de la tâche à accomplir

**Partager l'information relative à la solution**

Expliciter sa solution, verbalement ou par écrit, d'une manière compréhensible et structurée • Tenir compte du contexte, des éléments du langage mathématique et du ou des destinataires

**Valider la solution**

Confronter le résultat obtenu avec le résultat attendu • Rectifier sa solution, au besoin • Apprécier la pertinence et l'efficacité des stratégies employées en comparant sa solution avec celle de ses pairs, de son enseignant ou d'autres sources • Justifier les étapes de sa démarche

### Critères d'évaluation

– Manifestation, oralement ou par écrit, de sa compréhension de la situation-problème
– Mobilisation des savoirs mathématiques appropriés à la situation-problème
– Élaboration d'une solution (c'est-à-dire d'une démarche et d'un résultat) appropriée à la situation-problème

### Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure de résoudre des situations-problèmes touchant un ou plusieurs champs de la mathématique et comportant des données multiples. Il fait appel avec justesse aux divers modes de représentation en les diversifiant d'une situation à l'autre, selon le contexte. Il utilise correctement les réseaux de concepts et de processus mathématiques visés. Il élabore une solution (une démarche et un résultat) en mettant en œuvre différentes stratégies, la valide et la communique en utilisant de façon rigoureuse les langages courant et mathématique.

La résolution d'une situation-problème nécessite la mobilisation de concepts et de processus propres à chaque champ mathématique.

- En arithmétique, l'élève choisit des opérations ainsi que les processus nécessaires pour les effectuer, en tenant compte des propriétés et des priorités de ces opérations; il interprète, selon le contexte, divers types de nombres utilisés.
- En algèbre, il généralise une situation à l'aide d'une expression algébrique et, s'il s'agit d'une équation, détermine et interprète l'inconnue, selon le contexte.
- En probabilité, il effectue des activités de dénombrement et calcule des probabilités. Il les interprète et prend des décisions, s'il y a lieu.
- En statistique, il élabore un questionnaire, au besoin, et il organise, présente et analyse des données provenant d'un sondage.
- En géométrie, il construit des figures, identifie des propriétés ainsi que des relations entre les propriétés des figures et utilise des définitions. Pour le calcul de longueurs et d'aires, il émet un raisonnement sur les formules en manipulant des expressions numériques ou algébriques et interprète les résultats obtenus.

*Figure 52 - La compétence Déployer un raisonnement mathématique et ses composantes tirée du programme de formation du MÉLS (2003, p. 245)*

## Compétence 2 et ses composantes

### *Former et appliquer des réseaux de concepts et de processus mathématiques*

Établir des liens structurés et fonctionnels entre des concepts et des processus • Dégager des lois, des règles et des propriétés • Mettre en relation différents réseaux de concepts et de processus • Recourir à différents modes de représentation • Coordonner les éléments du langage mathématique relatifs à ces réseaux

### *Établir des conjectures*

Analyser les conditions d'une situation • Organiser des jugements mathématiques • Former une opinion probable ou vraisemblable • S'approprier ou énoncer des conjectures adaptées à la situation • Apprécier la pertinence des conjectures retenues


### *Réaliser des démonstrations ou des preuves*

Choisir un mode de représentation • Utiliser les moyens propres au mode retenu • Recourir, au besoin, à des contre-exemples pour préciser, réajuster ou réfuter des conjectures • Mettre en forme les résultats de sa démarche • Reprendre l'exercice, au besoin

## Critères d'évaluation

– Formulation d'une conjecture appropriée à la situation[6]
– Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation[7]
– Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique[8] adapté à la situation
– Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente
– Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente

6. La situation à laquelle on fait allusion est décrite au dernier paragraphe de la page 243.
7. *Idem.*
8. Par *raisonnement mathématique*, on entend un raisonnement par analogie, par induction, par déduction et un raisonnement proportionnel, algébrique, géométrique, arithmétique, probabiliste ou statistique.

## Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève est en mesure de faire appel aux différents modes de pensée mathématique afin de cerner une situation et d'émettre des conjectures. Il met à profit les concepts et les processus appropriés à la situation et expérimente différentes pistes pour confirmer ou réfuter ses conjectures. Il les valide soit en appuyant chaque étape de sa solution sur des concepts, des processus, des règles ou des énoncés, qu'il exprime de façon structurée, soit en fournissant des contre-exemples.

Le déploiement d'un raisonnement mathématique nécessite, entre autres, la mobilisation de concepts et de processus propres à chaque champ mathématique.

- En arithmétique, l'élève sollicite son sens du nombre et des opérations et utilise l'équivalence de nombres ou d'expressions numériques. Il effectue des opérations sur les nombres et a recours aux concepts de rapport, de taux, de proportion ainsi qu'aux stratégies multiplicatives, entre autres lorsqu'il s'agit de conjectures portant sur des situations de proportionnalité.
- En algèbre, il interprète, construit et manipule des expressions algébriques.
- En probabilité, il exploite les concepts de dénombrement et d'événement afin de calculer des probabilités.
- En statistique, il traite des données, c'est-à-dire qu'il organise, représente et analyse un ou plusieurs éléments d'un sondage.
- En géométrie, il procède par des déductions simples à partir de définitions et de propriétés, par exemple pour déterminer la valeur de mesures manquantes.

*Figure 53 - La compétence Communiquer à l'aide du langage mathématique et ses composantes tirée du programme de formation (MÉLS, 2003, p. 247)*

## Compétence 3 et ses composantes

**Analyser une situation de communication à caractère mathématique**

Reconnaître l'objet du message • Distinguer le sens des termes utilisés dans la vie courante de leur sens en mathématique • Consulter, au besoin, différentes sources d'information • Organiser ses idées et établir un plan de communication


**Interpréter ou transmettre des messages à caractère mathématique**

Exprimer ses idées au moyen du langage mathématique en tenant compte des règles et des conventions qui s'y rattachent ainsi que du contexte • Valider un message pour en améliorer la compréhension, s'il y a lieu • Résumer des informations • Discuter à partir de messages à caractère mathématique

**Produire un message à caractère mathématique**

Choisir, selon le contexte, les éléments du langage mathématique appropriés au message • Associer, selon le contexte, des images, des objets ou des concepts à des termes et à des symboles mathématiques • Sélectionner des modes de représentation selon l'objet du message et l'interlocuteur

## Critères d'évaluation

- Interprétation juste d'un message comportant au moins un mode de représentation mathématique adapté à la situation
- Production d'un message qui est conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et qui tient compte du contexte

## Attentes de fin de cycle

À la fin du premier cycle du secondaire, et ce, dans tous les champs de la mathématique, l'élève est en mesure d'interpréter ou de produire des messages oraux ou écrits. Il utilise le langage mathématique et le langage courant appropriés en faisant appel à divers modes de représentation adaptés. Les messages sont cohérents et sans ambiguïté selon la situation et l'interlocuteur; il peut les expliciter si nécessaire.

Chaque champ de la mathématique nécessite la mobilisation de concepts et de processus différents.

- En arithmétique et en algèbre, l'élève fait appel à des expressions symboliques découlant de la modélisation ou de la généralisation des relations entre les nombres.
- En probabilité et en statistique, il explique les procédés de dénombrement qu'il utilise et il organise, représente et interprète des données.
- En géométrie, il décrit et interprète des figures géométriques. Lorsqu'il recherche la valeur des mesures manquantes, il produit et interprète des formules.

## Annexe 2 - Grille analytique à échelle descriptive de Demers et Radford (2004)

| Critères | Niveau 1 | Niveau 2 | Niveau 3 | Niveau 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Syntaxe et symboles** L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **clarté et exactitude**. | L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **peu de clarté et d'exactitude**. | L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **une certaine clarté et exactitude**. | L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **clarté et exactitude**. | L'élève utilise les symboles, les conventions et la terminologie mathématique avec **beaucoup de clarté et d'exactitude**. |
| **Organisation de la présentation** Avec **clarté, logique et efficacité**, l'élève organise, présente et appuie ses idées à l'aide de différentes formes de communication (p. ex., projets, diagrammes, croquis, dessins). | À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec **peu de clarté, de logique et d'efficacité**. | À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec une **certaine clarté, logique et efficacité**. | À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec **clarté, logique et efficacité**. | À l'aide de différentes formes de communication, l'élève organise, présente et appuie ses idées avec **beaucoup de clarté, de logique et d'efficacité**. |
| **Engagement au dialogue** L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques **avec clarté, pertinence et profondeur**. | L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec **peu de clarté, de pertinence et de profondeur**. | L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec une **certaine clarté, pertinence et profondeur**. | L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec **clarté, pertinence et profondeur**. | L'élève exprime des propos ou présente des arguments afin de faire valoir ses points de vue mathématiques avec **beaucoup de clarté, de pertinence et de profondeur**. |
| **Considération des arguments et des propos des autres** L'élève est à l'écoute des arguments ou des propos des autres et, avec **efficacité**, **logique** et **pertinence**, donne suite aux arguments ou propos. | L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec **peu d'efficacité, de logique et de pertinence**. | L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec une **certaine efficacité, logique et pertinence**. | L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec **efficacité, logique et pertinence**. | L'élève écoute les arguments ou propos des autres et y donne suite avec **beaucoup d'efficacité, de logique et de pertinence**. |

## Annexe 3 - Exemples de stratégies mathématiques potentielles pour les six situations

**Situation 1 :** La situation des *Allumettes*

*Quelques stratégies mathématiques anticipées*

a) Nous croyons que les élèves seront davantage portés à voir apparaître des « carrés » dans les dessins en fonction du rang occupé par le dessin. Ainsi, le raisonnement des élèves pourrait être du type :
Pour le premier rang, il y a un carré formé de 4 allumettes ;
Pour le deuxième rang, il y a deux carrés formés de 7 allumettes (il y a une allumette commune aux deux carrés) ;
Pour le troisième rang, il y a trois carrés formés de 10 allumettes (il y a deux allumettes communes aux trois carrés : une de moins que le rang du dessin (3 – 1) ;
Pour le 97e dessin, j'aurais donc 97 carrés formés chacun de 4 allumettes, mais 96 allumettes auront été comptées en double. Je dois donc faire pour trouver le nombre total : 97 x 4 – 96 allumettes. Soit 292 allumettes. Ce raisonnement se fonde sur la règle 4n – (n – 1) où n est le rang.

La stratégie canonique visant à construire une table de valeurs tout en déterminant le « bond » et en finalisant une règle en trouvant le « terme au rang 0 » risque aussi d'être populaire. Ce raisonnement se fonde sur la règle 3n + 1 et sur le rang « 0 » et son terme correspondant. Concrètement, les élèves commencent par établir une table de valeurs ordonnée du plus petit terme vers le plus grand. Ensuite, ils calculent l'augmentation du nombre d'allumettes pour un seul rang, ce qui revient à calculer le taux de variation de la fonction affine. Enfin, ils trouvent le terme au rang « 0 » (terme initial) en remplaçant par un couple de leur table de valeurs pour trouver la règle canonique (3n + 1). Cette même règle pourrait toutefois être dégagée de la réflexion sur le dessin : « *j'ajoute trois allumettes à chaque dessin, mais il y a aussi une allumette au départ (au premier carré) à ne pas oublier* ».

b) Le raisonnement inverse en termes de « carrés » est moins évident à faire ici. C'est pourquoi nous croyons que pour répondre à cette deuxième question, les élèves seront portés à faire une table de valeurs jusqu'à ce qu'ils arrivent à 46 allumettes. Ils obtiendront alors le 15e rang. Ils pourraient aussi faire des essais pour arriver à la solution.
En établissant toutefois une table de valeurs, les élèves pourraient ainsi dégager une deuxième règle en remarquant qu'à chaque « saut de rang », on ajoute trois allumettes. Pour connaître le nombre d'allumettes en fonction du rang, on peut donc faire trois fois le rang et ajouter la première allumette du bout (3n + 1, où n représente le rang). De cette règle, il est plus facile de dégager la règle inverse

pour trouver le rang lorsque nous connaissons le nombre d'allumettes ((nombre d'allumettes – 1) divisé par 3).

c) Deux principales règles risquent de se dégager :
4n – (n – 1) où n représente le rang
3n + 1 où n représente le rang
Les deux raisonnements sous-jacents ont été expliqués en a) et b).

**Situation 2 :** La situation du *Magicien*
*Quelques stratégies mathématiques anticipées*

Puisque les élèves ne sont pas encore habiles avec la manipulation formelle d'expressions algébriques, on peut s'attendre à obtenir plusieurs essais pour montrer que le truc fonctionne (une phase d'*action*). Ensuite, nous croyons que certains élèves, principalement en mots, seront à même d'écrire des phrases du type : « *le magicien me fait faire des opérations inverses qui s'annulent* » ou bien « *peu importe mon nombre de départ, le magicien me le fait retirer à la fin après une série d'opérations qui s'annulent* ».

On peut aussi s'attendre à ce que l'élève utilise l'algèbre (plus formelle) pour montrer que les différentes opérations aboutissent à « x + 8 » alors, à la 2e question, il suffit de soustraire « x » (le terme initial) pour obtenir 8 à tout coup.

Ainsi, le recourt à une expression algébrique nous paraît aussi une solution possible utilisée par les élèves.

Soit : x : le nombre quelconque choisi au départ

On peut algébriser le problème à l'aide de l'expression suivante :

$$\frac{\left(\frac{4x+12}{2}\right)+10}{2}-x$$

En réduisant l'expression, on trouve :

$$\frac{2x+6+10}{2}-x$$
$$x+8-x$$
$$8$$

L'élève montrera ainsi que peu importe le nombre choisi au départ, on obtient le nombre 8 à la fin des manipulations.

À la question b), plusieurs solutions sont possibles.  Pensons à :

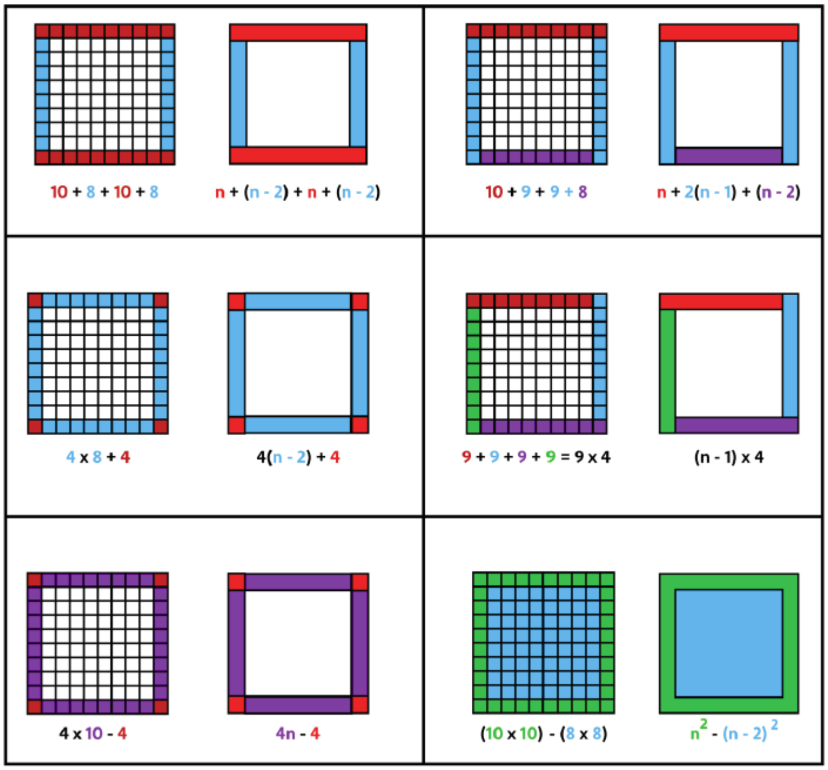
1- *Choisir un nombre ;*
2- *Soustraire 20 ;*
3- *Multiplier le résultat par 2 ;*
4- *Ajouter 40 ;*
5- *Ajouter 20 ;*
6- *Multiplier le résultat obtenu par une demi ;*
7- *Ajouter 10 ;*
8- *Retrancher le nombre de départ ;*
9- *On obtient alors 20.*

**Situation 3 :** La situation de l'*Enseignant*

*Quelques stratégies mathématiques anticipées*

Voici une présentation visuelle de quelques stratégies qui pourraient émerger qui complètent celles présentées à la section 3.4.3.2.2. Cette présentation imagée provient du site Youcubed (https://www.youcubed.org/) de la professeure Boaler que nous avons consulté ici.

*Figure 54 - Présentation imagée de stratégies possibles pour résoudre la situation de l'Enseignant*




**Commentaires potentiels que les élèves peuvent faire sur les copies de Maxime et Amélie**

Il est difficile d'anticiper toutes la variété des commentaires qui peuvent être écrits sur chacune des copies. Pour chacun des élèves, on peut toutefois s'attendre aux commentaires suivants.

**AMELIE :**

- *Amélie travaille beaucoup sur les dessins ;*
- *La solution d'Amélie est peu commune ; je ne la comprends pas ;*
- *La formule donnée par Amélie ne respecte pas la priorité des opérations ;*
- *Amélie explique plus « en mots » que Maxime ;*
- *Je ne comprends pas d'où vient le « +4 » dans la table de valeurs ; Amélie pourrait l'expliquer ;*
- *Amélie est bien structurée ;*

**MAXIME :**

- *Maxime est un peu plus brouillon qu'Amélie ;*
- *Il explique bien ses calculs ; on voit bien son raisonnement ;*
- *Maxime pourrait expliquer plus avec des mots ce qu'il fait ;*
- *Maxime aurait pu mettre une variable dans son équation ;*

**Situation 4 :** La situation de la *Balance*

*Un exemple de résolution possible*

a) Du troisième équilibre, je conclus que 2 bols sont égaux à 4 verres. En effet, du troisième équilibre, j'élimine 1 verre de chaque côté ce qui me permet de conclure qu'un bol est égal à 2 verres.

b) Sur le deuxième équilibre, je remplace, à droite, tous les bols par des verres. Puisque 1 bol est égal à 2 verres, sur le plateau droit, je peux placer 16 verres + 4 verres (20 verres).

   Les 20 verres sont équivalents à 2 assiettes + 1 cafetière.

   Puisqu'une cafetière est égale à 8 verres (du premier équilibre), il me reste, en retirant 8 verres et la cafetière, 2 assiettes égalent à 12 verres

   Donc, 1 assiette est égale à 6 verres.

   1 bol est égal à 2 verres.

   Donc, 1 assiette est égale à 3 bols.

c) Pour former l'équilibre demandé entre des cafetières et des assiettes, on peut ramener ces deux objets en « verres » et chercher le multiple commun entre les deux.

   Ainsi :

   - 1 cafetière est égale à 8 verres
   - 1 assiette est égale à 6 verres

   Un multiple commun entre 8 et 6 serait 24. Ainsi, on peut placer 3 cafetières d'un côté et 4 assiettes de l'autre.

**Situation 5 :** La situation du *Déménagement*

*Un exemple de résolution possible*

**Partie 1 :**

Soit : x : le nombre de boîtes que contient l'intérieur de l'auto de Marie

3x : le nombre de boîtes que contient le camion

Il y avait 352 boîtes à déménager au total et à la fin de la journée il en reste 25. Donc, 327 boîtes ont été déménagées.

Selon les allers-retours de Marie (8) et de l'oncle (7), on peut alors poser l'équation suivante :

$$8(x + 1) + 7 (3x) = 327$$

$$8x + 8 + 21x = 327$$

$$29x = 319$$

$$x = 11$$

**Conclusion :** L'automobile de Marie permet de déménager 12 boîtes (11 boîtes à l'intérieur et une sur le toit) et le camion en contient donc 33 (3 fois l'intérieur de l'auto de Marie).

**Situation 6 :** La situation des *Équations*

*Des exemples d'argumentation possibles*

**Équation 1 :**

- *Seul Pascal arrive à la bonne solution : il est donc le meilleur.*
- *Mylène ayant fait une erreur à la toute fin de sa résolution en divisant le 22 par 6 au lieu de diviser le 6 par 22. Toutefois, sa résolution est plus claire que celle de Pascal qui ne présente pas toutes ses démarches. Je choisis donc la solution de Mylène.*
- *La solution de Pascal ne respecte pas ce que nous avons appris en classe. Je choisis donc la solution de Mylène.*

**Équation 2 :**

- *La solution de Mylène est plus classique, mais avec une erreur de distributivité. Puisqu'elle a fait ce que nous avons appris en classe, elle est meilleure.*
- *Pascal fait une déduction (en remarquant que la parenthèse doit être égale à 10 ; en ramenant l'équation sous la forme 15 x Y = 150, donc Y = 10) qui ne cadre pas avec la résolution enseignée (en appliquant la distributivité). Il n'a pas laissé assez de traces de sa démarche. Je choisis Mylène malgré son erreur.*

**Équation 3 :**

- *Mylène arrive à la bonne réponse, mais je ne comprends pas sa démarche. Elle est meilleure quand même.*
- *Pascal utilise la technique du produit croisé, mais il fait une erreur. Sa stratégie est toutefois plus efficace.*
- *Le raisonnement de Mylène est mieux appuyé avec son indication de « multiplication par 3 » laissant présager une mise en commun au même dénominateur. Elle laisse plus d'éléments pour expliquer son raisonnement et elle est donc meilleure.*

## Annexe 4 - Quelques précisions à propos de la préexpérimentation et de l'évolution de la grille d'analyse

***Modalités de la préexpérimentation : lieux, participants, moments et durée de la préexpérimentation***

La préexpérimentation s'est déroulée à l'école secondaire Monseigneur-Richard dans deux classes de 3e secondaire. L'école secondaire Monseigneur-Richard accueille plus de 1100 élèves. Cette dernière se situe en milieu défavorisé. Au moment de la préexpérimentation, elle était la deuxième école la plus défavorisée de l'Île de Montréal.

Au sein de cet établissement, une enseignante de 3e secondaire, qui compte plus de cinq années d'expérience en enseignement dont au moins trois avec le nouveau programme de formation, a été approchée. Cette enseignante est à la fois à l'aise avec les contenus de formation du premier cycle du secondaire, particulièrement ceux de la 2e secondaire, et elle expérimente aussi depuis plusieurs années l'approche par compétences préconisée par le programme de mathématiques du Québec.

Afin de recueillir des productions d'élèves de la 3e secondaire pour chacune des situations, nous avons expérimenté toutes les situations dans deux groupes d'élèves dits « réguliers ». Ainsi, près de 60 élèves ont fait partie de la préexpérimentation.

La préexpérimentation s'est déroulée au mois d'octobre 2011. Graduellement, et en lien avec la planification de l'enseignante, les six situations ont été proposées aux élèves. L'enseignante ciblée a été responsable de l'animation des situations en classe et le chercheur n'a pas été présent en classe au cours de leur réalisation.

***La cueillette et l'analyse des données lors de la préexpérimentation***

L'analyse des données de la préexpérimentation a reposé exclusivement sur les productions écrites des sujets-élèves aux six situations. À partir de la grille inititale, nous avons procédé à une analyse par situation pour chacun des groupes. Nous complétions une grille d'analyse pour chaque élève en encerclant les niveaux pour chacun des critères et des descripteurs. Nous avons ainsi cumulé 60 copies d'élèves réparties en deux groupes.

***Ajustement des situations initiales***

Nous avons conçu une séquence de six situations de communication et nous en avons fait l'analyse a priori. En préexpérimentant ces situations avec des sujets-élèves de 3e secondaire, nous souhaitions réajuster, au besoin, d'une part, le niveau de complexité de chaque situation et, d'autre part, le type et la qualité des questions posées.

Les formulations des questions ou les consignes ont donc été quelque peu retravaillées pour mieux clarifier les intentions de la situation ou favoriser la mobilisation des savoirs mathématiques souhaités. À cet effet, les commentaires de l'enseignante qui ont vécu la préexpérimentation des situations ont été aidants. À titre d'exemple, pour la situation de l'*Enseignant*, il a été proposé de mieux organiser la passation de la situation en laissant un temps défini pour chacune des phases de la situation. En effet, lors de la préexpérimentation, tous les documents ont été remis aux élèves du même coup (la question et les copies-types des élèves-fictifs Amélie et Maxime) et les élèves étaient perdus dans toute la documentation reçue. Nous avons donc ajusté la passation en deux phases : une première où les élèves doivent faire leur corrigé et une seconde dans laquelle ils reçoivent les copies d'Amélie et Maxime pour ensuite répondre aux questions demandées.

L'enseignante a pu également nous expliquer les écueils vécus lors de la passation des situations en classe : incompréhension des élèves, plusieurs questions sur un terme ou un mot, situation trop longue, trop courte, etc. Elle a d'ailleurs mentionné que la situation des *Allumettes* avait été beaucoup trop facile pour les élèves qui l'avaient terminée en moins de 10 minutes.

Ainsi, quelques modifications ont été apportées au texte des problèmes proposés, et nous avons procédé à quelques ajustements au niveau des temps de passation et de l'ordre dans lequel certains documents étaient remis aux élèves.

***Évolution de la grille initiale, à une grille améliorée, à une grille finale***

Des changements plus importants ont eu lieu à l'égard de la grille d'analyse tels que présentés à la **section 3.5** de la méthodologie.

Ci-après, nous présentons, sous forme de tableaux, l'évolution de certains critères de la grille.

*Tableau 21 - Grille initiale d'analyse - Les 4 niveaux du critère 1: l'élève mobilise le savoir avec exactitude et efficacité*

| *L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité* | | | |
|---|---|---|---|
| **NIVEAU 1** | **NIVEAU 2** | **NIVEAU 3** | **NIVEAU 4** |
| L'élève mobilise le savoir mathématique avec **peu** d'exactitude et d'efficacité. | L'élève mobilise le savoir mathématique avec une **certaine** exactitude et efficacité. | L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité. | L'élève mobilise le savoir mathématique avec **beaucoup** d'exactitude et d'efficacité (efficience). |

*Tableau 22 - Ajouts de descripteurs aux 4 niveaux du critère 1: l'élève mobilise le savoir avec exactitude et efficacité*

| *L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité* | | | |
|---|---|---|---|
| **NIVEAU 1** | **NIVEAU 2** | **NIVEAU 3** | **NIVEAU 4** |
| **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>peu</u> d'exactitude :**<br>La production contient plusieurs erreurs majeures.<br>*Préciser les erreurs observées dans la situation.* | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>une certaine</u> exactitude :**<br>La production contient 2 ou 3 erreurs mineures ou 2 erreurs majeures.<br>*Préciser les erreurs observées dans la situation.* | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude :**<br>La production contient 1 ou 2 erreurs mineures.<br>*Préciser les erreurs observées dans la situation.* | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>beaucoup</u> d'exactitude :**<br>La production ne contient pas d'erreurs. |
| **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>peu</u> d'efficacité :**<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>une certaine</u> efficacité :**<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>efficacité</u> :**<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>efficience</u> :**<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… |

*Tableau 23 - Deuxième critère de la grille préliminaire d'observation avec des descripteurs: l'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée*

| *L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée* | | | |
|---|---|---|---|
| **NIVEAU 1** | **NIVEAU 2** | **NIVEAU 3** | **NIVEAU 4** |
| **$D_1$ : L'élève ne développe pas une argumentation rigoureuse :**<br>L'élève ne fait référence qu'à des objets pragmatiques, des savoirs pratiques engagés dans l'action.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_1$ : L'élève développe une argumentation peu rigoureuse:**<br>L'élève commence à faire référence à des règles ou des théorèmes.<br>L'élève laisse peu ou pas de traces de validation des étapes de sa démarche.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_1$ : L'élève développe une argumentation rigoureuse:**<br>L'élève fait référence à des règles ou des théorèmes.<br>L'élève laisse quelques traces de validation des étapes de sa démarche.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_1$ : L'élève développe une argumentation très rigoureuse:**<br>L'élève fait référence à des règles ou des théorèmes.<br>L'élève laisse des traces de validation des étapes de sa démarche.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… |
| **$D_2$ : L'élève développe une argumentation non structurée:**<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation peu structurée:**<br>L'élève explique peu ou pas de liens entre les étapes de sa démarche.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation structurée:**<br>L'élève explique quelques liens entre les étapes de sa démarche.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation très structurée:**<br>L'élève explique les liens entre les étapes de sa démarche.<br>*Élément observable 1*<br>*Élément observable 2*<br>… |

*Tableau 24 - Grille initiale utilisée dans la phase de préexpérimentation*

| **Critères d'évaluation** | **Niveau 1** | **Niveau 2** | **Niveau 3** | **Niveau 4** |
|---|---|---|---|---|
| **Critère 1**<br><br>*L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et efficacité* | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>peu</u> d'exactitude.**<br>La production contient plusieurs erreurs majeures. | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>une certaine</u> exactitude.**<br>La production contient 2 ou 3 erreurs mineures ou 2 erreurs majeures. | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude.**<br>La production contient 1 ou 2 erreurs mineures. | **$D_1$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>beaucoup</u> d'exactitude.**<br>La production ne contient pas d'erreurs. |
| | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>peu</u> d'efficacité.** | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>une certaine</u> efficacité.** | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>efficacité</u>.** | **$D_2$ : L'élève mobilise le savoir mathématique avec <u>efficience</u>.** |
| **Critère 2**<br><br>*L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée* | **$D_1$ : L'élève <u>ne développe pas</u> une argumentation rigoureuse :**<br><br>L'élève ne fait référence qu'à des objets pragmatiques, des savoirs pratiques engagés dans l'action. | **$D_1$ : L'élève développe une argumentation <u>peu</u> rigoureuse:**<br>L'élève commence à faire référence à des règles ou des théorèmes. L'élève laisse peu ou pas de traces de validation des étapes de sa démarche. | **$D_1$ : L'élève développe une argumentation rigoureuse:**<br>L'élève fait référence à des règles ou des théorèmes.<br><br>L'élève laisse quelques traces de validation des étapes de sa démarche. | **$D_1$ : L'élève développe une argumentation <u>très</u> rigoureuse:**<br>L'élève fait référence à des règles ou des théorèmes.<br>L'élève laisse des traces de validation des étapes de sa démarche. |
| | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation non structurée.** | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation peu structurée:**<br>L'élève explique peu ou pas les liens entre les étapes de sa démarche. | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation structurée:**<br>L'élève explique quelques liens entre les étapes de sa démarche. | **$D_2$ : L'élève développe une argumentation très structurée:**<br>L'élève explique les liens entre les étapes de sa démarche. |

*Figure 55 - Grille d'analyse améliorée suite à la préexpérimentation: un exemple pour la situation des Allumettes*

**GRILLE D'ANALYSE POUR L'ÉVALUATION DES SITUATIONS DE COMMUNICATION DE PREMIER NIVEAU**

SUJET : ____________ SITUATION : __________ La production de l'élève est : Complète ? ☐ Incomplète ? ☐ Caron : ☐

| CRITÈRES D'ÉVALUATION | NIVEAU 1 | NIVEAU 2 | NIVEAU 3 | NIVEAU 4 |
|---|---|---|---|---|
| **CRITÈRE 1** *L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation* | La présentation de l'élève est minimale : pratiquement aucune traces de résolution ne sont laissées. La réponse n'est pas mise en évidence, ni les unités. | La présentation de l'élève est partielle : il est difficile de repérer les étapes de résolution de l'élève. La réponse n'est pas mise en évidence, ni les unités. | Bien que la présentation soit soignée, certaines étapes sont implicites. On devine la réponse. | L'élève est soigné dans sa présentation. L'élève identifie toutes les étapes de sa réalisation, sans implicite. L'élève met en évidence sa réponse et les unités qui s'y rattachent. |
| **CRITÈRE 2** *L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et pertinence* | La solution de l'élève est fausse et repose sur la stratégie ____________________ Règle sous-jacente : ____________________ Erreurs sous-jacentes : ________________ | La solution de l'élève est partiellement vraie et repose sur la stratégie ____________________ Règle sous-jacente : ____________________ Erreurs sous-jacentes : ________________ | La solution de l'élève est vraie et repose sur la stratégie ____________________ Règle sous-jacente : ____________________ | |
| | **D1 : Les objets mathématiques** L'élève ne fait aucune référence à des objets mathématiques. | **D1 : Les objets mathématiques** L'élève ne fait référence qu'à des objets pragmatiques, des savoirs pratiques engagés dans l'action. | **D1 : Les objets mathématiques** L'élève désigne pertinemment quelques objets mathématiques en jeu. | **D1 : Les objets mathématiques** L'élève désigne correctement l'ensemble des objets mathématiques en jeu. |
| | **D2 : Discours de l'élève** L'élève ne laisse aucune trace de son discours | **D2 : Discours de l'élève** Au sens de Balacheff, l'élève explique sa solution. Au sens de Chevallard, il ne demeure toutefois que dans la technique. | **D2 : Discours de l'élève** Au sens de Balacheff, l'élève tente de prouver sa solution. Au sens de Chevallard, il amorce un discours sur ses techniques (technologie). | **D2 : Discours de l'élève** Au sens de Balacheff, l'élève tente de démontrer sa solution. Au sens de Chevallard, il élabore un discours riche sur ses techniques (technologie). |
| **CRITÈRE 3** *L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée (souci du lecteur)* | **D3 : L'élève développe une argumentation non-structurée.** | **D3 : L'élève développe une argumentation peu structurée:** L'élève explique peu les liens entre les étapes de sa démarche. | **D3 : L'élève développe une argumentation structurée:** L'élève explique la plupart des liens entre les étapes de sa démarche. | **D3 : L'élève développe une argumentation très structurée:** L'élève explique tous les liens entre les étapes de sa démarche. |

| | | *N1* | *N2* | *N3* | *N4* |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | D1 | | | | |
| | D2 | | | | |
| | D3 | | | | |
| b) | D1 | | | | |
| | D2 | | | | |
| | D3 | | | | |
| c) | D1 | | | | |
| | D2 | | | | |
| | D3 | | | | |

| | |
|---|---|
| L'élève a eu recours au langage formel dans sa production. Précisez certains éléments. | |
| La production de l'élève permet de sortir un **<u>élément à exploiter</u>** lors de l'enseignement. Précisez lequel.<br>Comment sera-t-il exploité lors d'une prochaine période d'enseignement ? | |
| Un **<u>élément hors du commun</u>** est ressorti de la production de l'élève.<br>Précisez lequel. | |
| | |

*Figure 56 - Modification du critère lié à l'argumentation*

<table>
<tr>
<td rowspan="4">CRITÈRE 3<br>L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée (souci du lecteur)</td>
<td>$D_1$ : Discours de l'élève<br>L'élève ne laisse aucune trace de son discours.</td>
<td colspan="2">$D_1$ : Discours de l'élève<br>L'élève amorce un discours, mais les traces sont difficiles à percevoir, à décoder. L'élève reste ostensif, il montre, sans vraiment expliciter.<br>Au sens de Chevallard, il ne demeure que dans la <u>technique</u>.</td>
<td>$D_1$ : Discours de l'élève<br>Au sens de Balacheff, l'élève <u>explique</u> sa solution.<br>Au sens de Chevallard, il <u>amorce</u> un discours sur ses techniques (technologie) (il cherche à rendre intelligible son discours pour lui).</td>
<td>$D_1$ : Discours de l'élève<br>Au sens de Balacheff, l'élève tente de <u>prouver</u> sa solution.<br>Au sens de Chevallard, il <u>élabore</u> un discours <u>riche</u> sur ses techniques (technologie) (il cherche à rendre intelligible son discours pour autrui).</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Puisque l'élève atteint un niveau 3 ou 4 pour son discours, les arguments avancés sont :</td>
<td>Vrais</td>
<td colspan="3">Expliquez :</td>
</tr>
<tr>
<td>Faux</td>
<td colspan="3">Expliquez :</td>
</tr>
<tr>
<td>Partiellement vrais</td>
<td colspan="3">Expliquez :</td>
</tr>
</table>

*Figure 57 - Grille finale d'analyse de l'activité mathématique et de la communication pour la situation de l'Enseignant*

**SUJET : ____________ SITUATION : ___________** La production de l'élève est : Complète ? ☐ Incomplète ? ☐ Précisez : ☐

| **CRITÈRES D'ÉVALUATION** | **NIVEAU 1** | **NIVEAU 2** | **NIVEAU 3** | **NIVEAU 4** |
|---|---|---|---|---|
| **CRITÈRE 1**<br>L'élève présente sa solution avec esthétisme et organisation | La présentation de l'élève est minimale : pratiquement aucune traces de résolution ne sont laissées. | La solution de l'élève est partielle : plus d'une étape est absente. Il est difficile de repérer les étapes de la réalisation. | La séquence de sa réalisation est facilement identifiable. La présentation de sa solution est toutefois incomplète (au moins une étape est absente). | La solution de l'élève est complète. L'élève identifie la séquence de sa réalisation (jusqu'à sa réponse). |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **CRITÈRE 2**<br>L'élève mobilise le savoir mathématique avec exactitude et pertinence | La solution de l'élève est <u>fausse</u> et repose sur la stratégie ______________<br>Règle sous-jacente : ______________<br>Erreurs sous-jacentes : ______________ | La solution de l'élève est <u>partiellement vraie</u> et repose sur la stratégie ______________<br>Règle sous-jacente : ______________<br>Erreurs sous-jacentes : ______________ | La solution de l'élève est vraie et repose sur la stratégie ______________<br>Règle sous-jacente : ______________ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| L'élève, dans sa résolution, utilise les registres suivants : | Registre naturel, écrit, en mots | Registre algébrique | Registre schématique/travail sur le dessin | Registre sous forme de tableau | Autre registre (spécifiez) : ______________ |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **CRITÈRE 3**<br>L'élève développe une argumentation rigoureuse et structurée<br>(souci du lecteur) | **NIVEAU 1** | **NIVEAU 2** | | **NIVEAU 3** | **NIVEAU 4** |
| | **D$_1$ : Discours de l'élève**<br>L'élève ne laisse aucune trace de son discours. | **D$_1$ : Discours de l'élève**<br>L'élève amorce un discours, mais les traces sont difficiles à percevoir, à décoder. L'élève reste ostensif, il montre, sans vraiment expliciter.<br>Au sens de Chevallard, il ne demeure que dans la <u>technique</u>. | | **D$_1$ : Discours de l'élève**<br>Au sens de Balacheff, l'élève <u>explique</u> sa solution.<br>Au sens de Chevallard, il <u>amorce</u> un discours sur ses techniques (technologie). Il cherche à rendre intelligible son discours pour lui. | **D$_1$ : Discours de l'élève**<br>Au sens de Balacheff, l'élève tente de <u>prouver</u> sa solution.<br>Au sens de Chevallard, il <u>élabore</u> un discours <u>riche</u> sur ses techniques (technologie). Il cherche à rendre intelligible son discours pour autrui. |
| | Puisque l'élève atteint un niveau 3 ou 4 pour son discours, les arguments avancés sont : | Vrais | Expliquez : | | |
| | | Faux | Expliquez : | | |
| | | Partiellement vrais | Expliquez : | | |

| | |
|---|---|
| L'élève a eu recours au langage formel dans sa production. Précisez certains éléments. | |
| La production de l'élève permet de sortir un **<u>élément à exploiter</u>** lors de l'enseignement. Précisez lequel.<br>Comment sera-t-il exploité lors d'une prochaine période d'enseignement ? | |
| Un **<u>élément hors du commun</u>** est ressorti de la production de l'élève.<br>Précisez lequel. | |
| À la question 3, l'élève fait ressortir les éléments suivants : | |
| À la question 4, l'élève fait ressortir les éléments suivants : | |
| Sur les copies de Maxime (M) et Amélie (A), l'élève fait les commentaires/actions suivant(e)s : | |

**Annexe 5 - Exemple du tableau Excel rassemblant toutes les données recueillies à partir de l'analyse des copies d'élèves pour chacune des situations**

<table>
<tr><th rowspan="4">Sujets</th><th>Production ?</th><th colspan="13">Situation # 1a)… Situation # 1c)</th><th colspan="3"></th></tr>
<tr><th rowspan="3">C/I ?</th><th colspan="4">Critère 1</th><th>Critère 2</th><th>Registres en jeu</th><th colspan="4">Critère 3</th><th colspan="3">Critère 3</th><th rowspan="2">Langage formel ?</th><th rowspan="2">Élément à exploiter dans le retour?</th><th rowspan="2">Élément hors du commun ?</th></tr>
<tr><th rowspan="2">1</th><th rowspan="2">2</th><th rowspan="2">3</th><th rowspan="2">4</th><th rowspan="2">V, F, P ?<br>Stratégie ?<br>Erreurs ?</th><th rowspan="2">Précisez lesquels</th><th colspan="4">Descripteur 1</th><th colspan="3">Si niveau 3 ou 4</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>V</th><th>F</th><th>P</th><th>Précisez</th><th>Précisez</th><th>Précisez</th></tr>
<tr><td>Sujet 1</td><td></td><td colspan="4"></td><td></td><td></td><td colspan="4"></td><td colspan="3"></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td colspan="4"></td><td></td><td></td><td colspan="4"></td><td colspan="3"></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sujet 30</td><td></td><td colspan="4"></td><td></td><td></td><td colspan="4"></td><td colspan="3"></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ce tableau est différent pour les situations du *Magicien* et du *Déménagement* où un travail dyadique est sollicité. Dans un premier temps, dans le tableau, les productions individuelles sont codées. Ensuite, les productions écrites de l'équipe des deux élèves (lesquelles sont produites sur une autre feuille) sont aussi codées. Ce tableau modifié permet de voir si ce qui est consigné individuellement est différent des consignations issues de la production en équipes. Plus clairement, on cherche à voir si le fait de placer les élèves en équipes a un effet sur l'activité de communication.

## Annexe 6 - Trois exemples de codages et de consignation d'information réalisés à partir de la grille d'analyse finale

***Un cas type de codage de la grille d'analyse pour la situation des Allumettes***

Nous montrons ici la production complète d'un sujet de l'un des deux groupes à l'étude, le groupe Sports-Études. Nous présentons le codage réalisé dans une grillette synthèse (figure 57). Dans cette grillette, nous résumons les informations pour chacune des sous-questions de la situation des *Allumettes* (Qa); Qb); Qc)). Ensuite, présentons les registres mobilisés par l'élève pour répondre à chacune des sous-questions (par exemple, dans la sous-question a), l'élève utilise un registre en mots, de équations algébriques et un tableau).

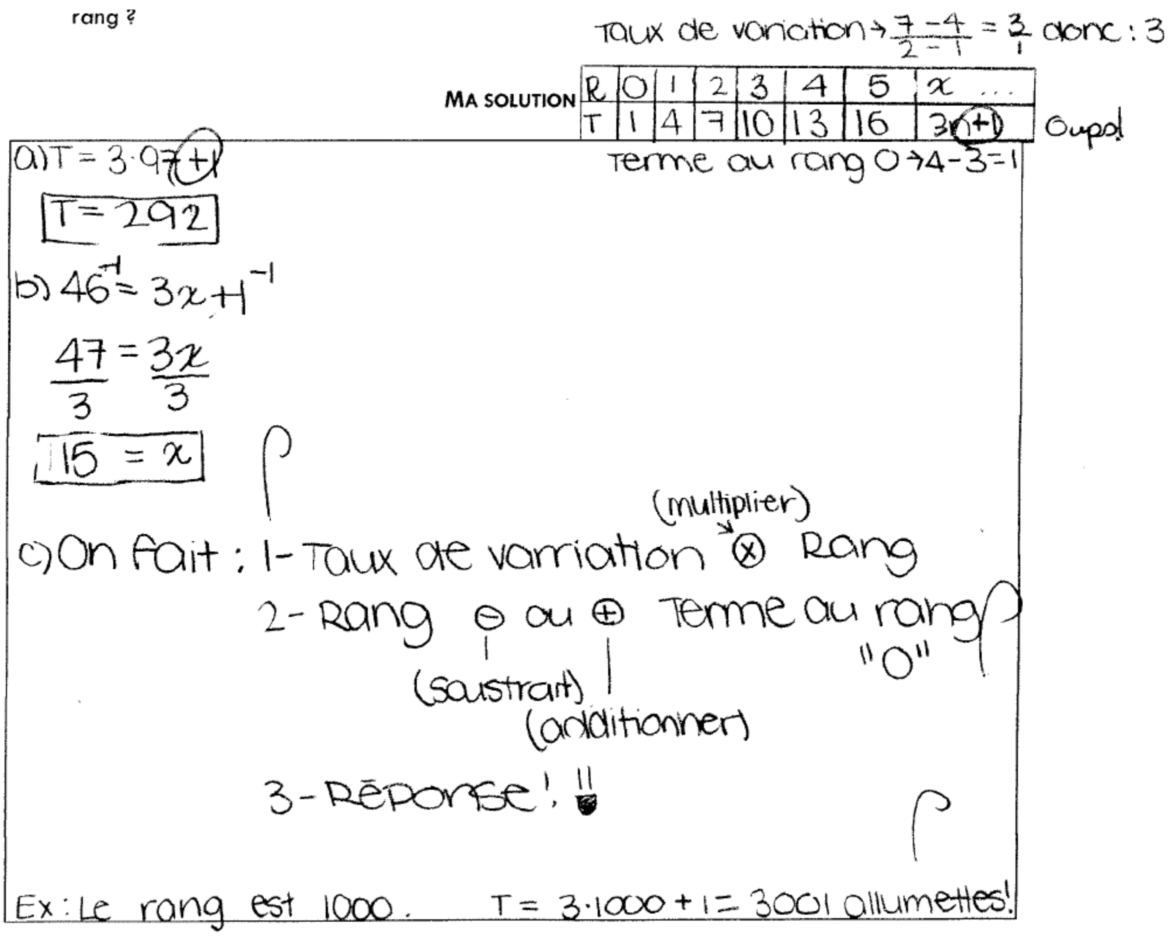
Pour les critères 1 et 3, nous indiquons dans le tableau les niveaux attribués à partir de la grille. Rappelons que le niveau 4 est le plus élevé de la grille.

Pour le critère 2, nous précisons, d'une part, si la stratégie utilisée par l'élève était vraie (V), partiellement vraie (P) ou fausse (F) tout en indiquant, dans ce cas-ci, la règle sur laquelle repose le raisonnement de l'élève (ici, 3n + 1 pour les Qa) et Qc)) ou la stratégie employée pour trouver le rang d'un dessin de 46 allumettes (que nous avons nommée « opérations inverses à partir de la règle algébrique 3n + 1» dans laquelle il y avait une petite erreur de calculs qui permet tout de même d'arriver à la bonne réponse).

Pour le critère 3, puisque l'élève atteint le niveau 3, ses arguments avancés reposent, par exemple pour la Qc), sur les étapes à suivre de la procédure qui a sans doute été institutionnalisée pour trouver une règle générale. Nous avons laissé ce sujet au niveau 3 puisque plusieurs implicites sontt présents dans sa présentation. On constate la présence d'un discours (des étapes de résolution) sans pour autant que les liens entre les étapes soient explicites (on laisse une partie de l'interprétation des étapes à l'interlocuteur).

Sur la grille d'analyse, nous avions également des questions ouvertes : le formalisme, les éléments à exploiter lors du retour et les éléments hors du commun. Dans un premier temps, avons constaté, dans ce cas-ci, la présence d'un certain formalisme via les opérations algébriques, notamment dans la Qb). Nous n'avons pas noté d'élément hors du commun dans cette production, mais voyons un intérêt à exploiter, en grand groupe, le type de discours qui reste dans une sphère privée et qui aurait avantage à être plus explicite.

*Figure 58 - Solution du sujet 15 du groupe SÉ*


rang ?

Taux de variation → $\frac{7-4}{2-1} = \frac{3}{1}$ donc : 3

MA SOLUTION

| R | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $x$ ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | $3x+1$ |

Oups!

Terme au rang 0 → 4 − 3 = 1

a) $T = 3 \cdot 97 + 1$

$\boxed{T = 292}$

b) $46^{-1} = 3x + 1^{-1}$

$\frac{47}{3} = \frac{3x}{3}$

$\boxed{15 = x}$

c) On fait : 1- Taux de variation (multiplier) ⊗ Rang

2- Rang ⊖ ou ⊕ Terme au rang "0" (soustrait) (additionner)

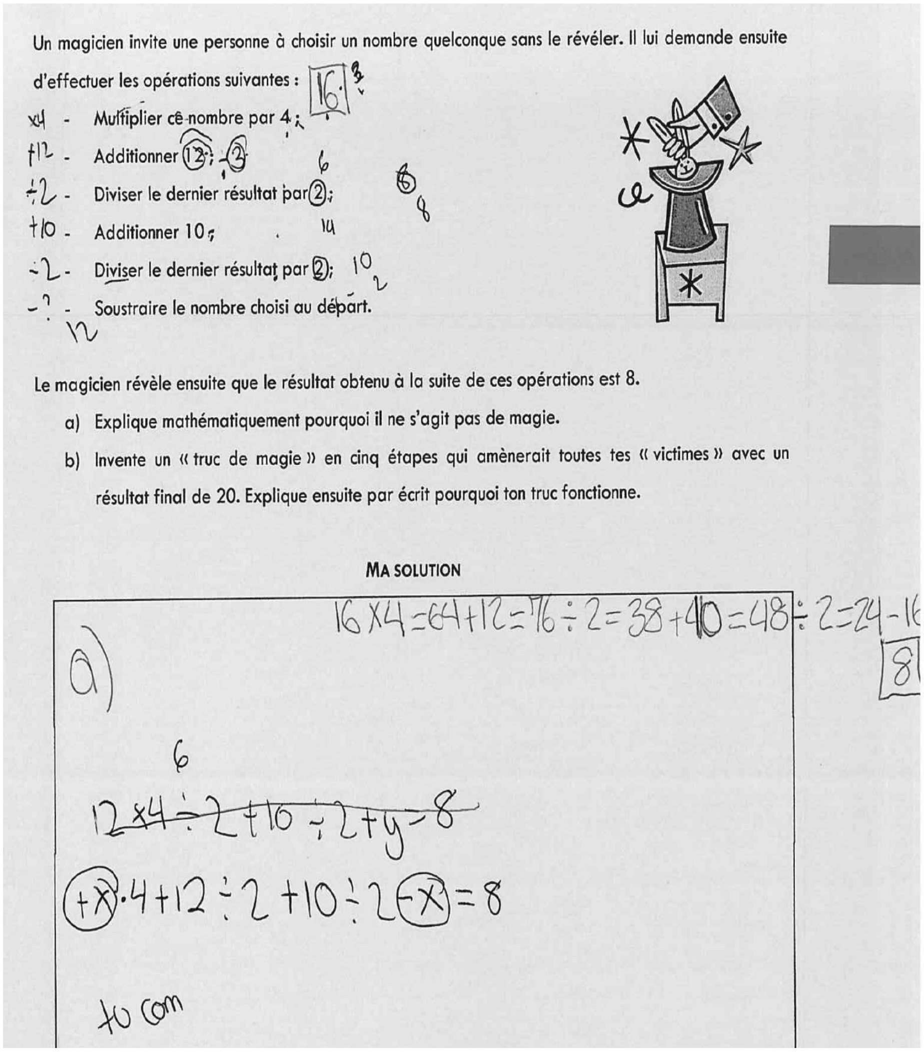
3- Réponse !!!

Ex : Le rang est 1000. $T = 3 \cdot 1000 + 1 = 3001$ allumettes!

### ***Un cas type de codage de la grille d'analyse pour la situation du Magicien***

L'exemple présenté ici est celui d'un élève du deuxième groupe à l'étude, un groupe régulier, lors de sa réalisation individuelle du problème du *Magicien*. Bien que le sujet # 9 soit peu loquace par le registre des mots comme nous le constatons dans sa production, on peut voir sur sa copie une chaîne d'opérations qu'il représente et sur laquelle il montre que la variable « x », choisie au départ, est éliminée à la fin. Il s'agit ici probablement d'une intuition, d'une amorce d'un discours algébrique, car on constate que l'élève encercle l'expression « + x·4 » de laquelle il enlève l'expression « x » ce qui est mathématiquement inexact. Au global, son opération est donc « 4x – x » ce qui n'équivaut pas à l'idée que la quantité choisie initialement doit être retirée à la fin des manipulations. Nous considérons que ce sujet fait une entrée, bien que minimale, dans le discours algébrique et c'est pourquoi nous ne le classons au niveau 3 pour le critère 3 dans la Qa). Les arguments qu'il avance sont toutefois faux puisqu'il ne retire pas la quantité initialement choisie à la fin de sa chaîne d'opérations.

*Figure 59 - Solution du sujet 9 du groupe R*



Un magicien invite une personne à choisir un nombre quelconque sans le révéler. Il lui demande ensuite d'effectuer les opérations suivantes : 16

- Multiplier ce nombre par 4 ;
- Additionner 12 ;
- Diviser le dernier résultat par 2 ;
- Additionner 10 ;
- Diviser le dernier résultat par 2 ;
- Soustraire le nombre choisi au départ.

Le magicien révèle ensuite que le résultat obtenu à la suite de ces opérations est 8.

a) Explique mathématiquement pourquoi il ne s'agit pas de magie.

b) Invente un « truc de magie » en cinq étapes qui amènerait toutes tes « victimes » avec un résultat final de 20. Explique ensuite par écrit pourquoi ton truc fonctionne.

**MA SOLUTION**

$16 \times 4 = 64 + 12 = 76 \div 2 = 38 + 10 = 48 \div 2 = 24 - 16$ $\boxed{8}$

a)

~~12 x4 ÷ 2 + 10 ÷ 2 + y - 8~~

$x \cdot 4 + 12 \div 2 + 10 \div 2 - x = 8$

to com

Le sujet n'ayant pas répondu à la question b), nous notons que sa réalisation est incomplète. Les registres utilisés par l'élève sont principalement le recours à l'arithmétique et une amorce d'un discours algébrique.

Les étapes de sa résolution sont difficilement repérables et c'est pourquoi nous le situons au niveau 2 au critère 1. Comme stratégie, nous repérons ce qui semble être des essais multiples qui convergent vers une amorce de généralisation.

Dans les sections ouvertes de la grille, nous repérons un usage minimal du formalisme par l'emploi d'une variable « x ». Nous n'avons pas noté d'élément hors du commun. Toutefois, il serait pertinent de faire parler l'élève sur sa chaîne d'opérations qui contient une variable.

*Un cas type de codage de la grille d'évaluation pour la situation de l'Enseignant*

Dans un premier temps, dans cette situation où l'élève est en position d'enseignant, nous codons sa réalisation à la question qui est posée (le corrigé en quelque sorte que l'élève enseignant utilise pour poser un regard sur les copies de Maxime et Amélie). Le sujet # 4 du groupe de Sports-Études fait un retour à l'unité, tout en expliquant la règle (4n+4) pour résoudre le problème.  C'est à partir de cette règle qu'il répond aux deux sous-questions.

Nous constatons la forte présence des registres en mots et de l'arithmétique pour la Qa) alors que le registre arithmétique est davantage utilisé en Qb). Quelques mots toutefois viennent conclure le calcul du sujet # 4.

Dans la situation de l'*Enseignant*, le caractère de complétude ne se résume pas qu'à la présence de réponses aux Qa) et Qb) du problème posé, mais bien aussi à la présence de réponses aux questions longues. Ainsi, le sujet # 4 a donné les réponses suivantes aux questions longues :

- **Comment pourrais-tu expliquer à la classe que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé la même règle ?**

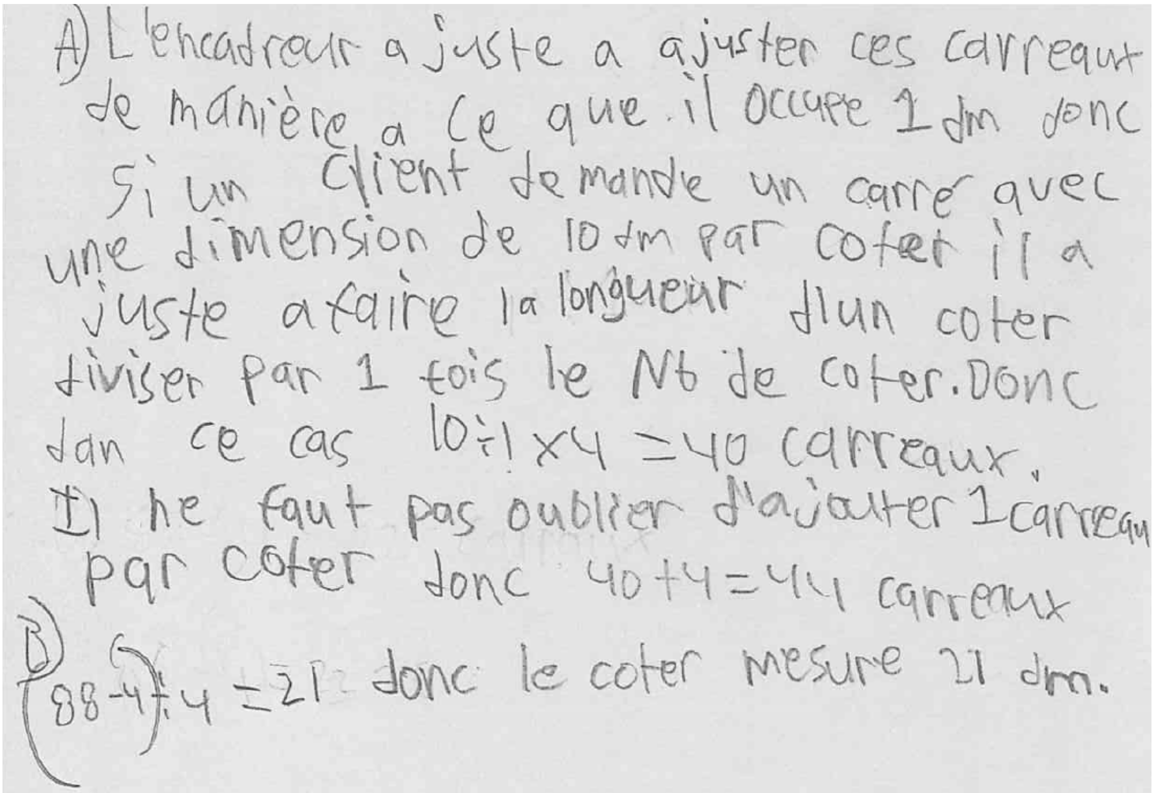
  *"10+5", "7+8", une équation qui donne une réponse n'est pas nécessairement le seul moyen d'y arriver*

- **Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ?  Explique pourquoi.**

  *Celle d'Amélie, plus claire et plus d'informations que celle de Maxime*

Par contre, le sujet # 4 n'a pas laissé de commentaires ou de traces sur les copies-types de Maxime et d'Amélie.

*Figure 60 - Solution du sujet 4 du groupe SÉ*



A) L'encadreur a juste a ajuster ces carreaux
de manière a ce que il occupe 1 dm donc
si un client demande un carré avec
une dimension de 10 dm par coter il a
juste a faire la longueur d'un coter
diviser par 1 fois le Nb de coter. Donc
dan ce cas 10÷1×4 = 40 carreaux.
Il ne faut pas oublier d'ajouter 1 carreau
par coter donc 40+4=44 carreaux
B) (88-4)÷4 = 21 donc le coter mesure 21 dm.

Au niveau du premier critère de l'organisation et de l'esthétisme, nous jugeons que l'élève atteint le 3e niveau pour les deux sous-questions. En Qa), le registre en mots nous parait plus difficile à suivre sans appui sur un dessin par exemple. Dans la Qb), l'élève ne pose pas sa règle que nous inférons être 4n + 1.

Pour le critère 3, dans la Qa), tout nous semble présent et les arguments avancés sont vrais. Il semble y avoir un souci du sujet de bien expliquer sa solution à son interlocuteur, notamment par sa vulgarisation du retour à des données de mesure plus réelles. Dans la Qb), pour le critère 3, il faut décoder que le sujet réalise les opérations inverses de sa règle 4n + 1. À cet égard, nous sentons moins une considération de l'interlocuteur. Le formalisme est très peu présent dans cette réalisation. Toutefois, l'aspect de poser une longueur de 1 dm par l'élève nous paraissait intéressant à exploiter lors du retour en grand groupe.

**Annexe 7 - Catégories préliminaires retenues pour coder les traces de communication laissées par les élèves-enseignants sur les copies des élèves-fictifs**

| Code utilisé en ordre alphabétique | Explications |
|---|---|
| Affectif/Encouragements | EE fait un commentaire de l'ordre de l'affectif (e.g. *Bravo*!, *C'est très bien!*, etc.) |
| Aspect de complétude/Élément superflu | EE indique qu'il manque une étape à la solution de l'élève ou qu'il juge une étape superflue. |
| Calligraphie | EE fait un commentaire sur la calligraphie de l'élève. |
| Compréhension du problème | EE fait un commentaire à l'élève sur ce que ce dernier a compris du problème (e.g. sur la copie de Maxime, EE indique « *attention, les carreaux ne doivent pas couvrir le miroir* »). |
| Erreur soulevée/Vraie ou fausse | EE repère une erreur dans la production de l'élève et l'indique. L'erreur repérée peut être vraie (c'est effectivement une erreur) ou fausse (EE met en jeu une conception de ses conceptions erronées). |
| Esthétisme | EE fait un commentaire de l'ordre de l'esthétisme de la production. |
| Formalisme/Rigueur/Précision | EE fait un commentaire sur l'usage ou non du formalisme dans la présentation de l'élève (e.g. mentionner à Maxime qu'il aurait pu utiliser la variable « x » dans son équation). Ce peut aussi être un commentaire sur un manque de précision (e.g. dans la copie de Maxime, un élève encercle le mot « *côté* » et précise « *mesure d'un côté* »). |
| Inclassable | Nous n'avons pas réussi à classer l'élément de communication puisqu'il nous est incompréhensible ou demande une inférence trop importante (e.g. « *Il a mieux réussi* »). |
| Notation | EE indique une note sur la copie de l'élève. |
| Souci du lecteur/Argumentation/Clarté | EE indique à l'élève qu'il devrait pousser plus loin ses explications (e.g.: « *je ne comprends pas la formule, tu devrais nous donner un exemple* ». |
| Stratégie/Comparaison | EE établit une comparaison entre les stratégies de Maxime et Amélie (catégorie s'appliquant à la situation de l'*Enseignant* seulement) et en les nommant explicitement. |
| Stratégie/Efficacité/Efficience | EE fait référence à l'efficience de la stratégie (efficacité + rapidité) ou à son efficacité. |
| Stratégie/Proposition vraie ou fausse | EE fait une proposition vraie ou fausse dans la stratégie à l'élève en l'inscrivant sur sa copie. |
| Stratégie/Méthode avancée/Savante | EE mentionne que la stratégie lui paraît trop avancée (e.g. EE indique à Amélie qu'elle « *s'est compliquée la vie* ») |
| Stratégie/Refus de l'essais-erreurs | EE refuse la stratégie d'essais-erreurs pour trouver la mesure du côté. |

## Annexe 8 – Catégories préliminaires retenues pour coder les arguments avancés par les élèves-enseignants dans les situations de l'*Enseignant*, du *Déménagement* et des *Équations*

| Code utilisé en ordre alphabétique | Arguments principaux de la prise de position[100]. |
|---|---|
| Aspect de complétude/Élément superflu | EE indique qu'il manque une étape à la solution de l'élève ou qu'il juge une étape superflue. |
| Erreur soulevée/Vraie ou fausse | EE repère une erreur dans la production de l'élève et l'indique. L'erreur repérée peut être vraie (c'est effectivement une erreur) ou fausse (EE met en jeu une conception de ses conceptions erronées). |
| Formalisme/Rigueur/Précision | EE fait un commentaire sur l'usage ou non du formalisme dans la présentation de l'élève (e.g. mentionner à Maxime qu'il aurait pu utiliser la variable « x » dans son équation). Ce peut aussi être un commentaire sur un manque de précision (e.g. dans la copie de Maxime, un élève encercle le mot « *côté* » et précise « *mesure d'un côté* »). |
| Inclassable | Nous n'avons pas réussi à classer l'élément de communication puisqu'il nous est incompréhensible ou demande une inférence trop importante (e.g. « *Il a mieux réussi* »). |
| Importance de la réponse | EE insiste dans son argumentaire sur l'importance de la bonne réponse de l'élève. |
| Souci du lecteur/Argumentation/Clarté | EE argumente que l'élève devrait pousser plus loin ses explications pour mieux se faire comprendre. |
| Stratégie/Comparaison | EE établit une comparaison entre les stratégies des élèves (e.g. « *j'apprécie davantage la stratégie d'Amélie pour la question a), mais celle de Maxime est mieux pour la question b)* » |
| Stratégie/Comparaison au connu | EE prend position par rapport à une stratégie puisqu'elle fait référence à ce qu'il connaît, ce qu'on lui a enseigné. |
| Stratégie/Coïncidence | Devant deux stratégies (Amélie et Maxime), l'élève mentionne que le fait qu'elles arrivent à la même réponse est le fruit du hasard. |
| Stratégie/Efficacité/Efficience | EE fait référence à l'efficience d'une stratégie (efficacité + rapidité) ou à son efficacité dans son argumentaire. |
| Stratégie/Équivalence | EE argumente que les deux stratégies présentées sont équivalentes et reposent sur le même raisonnement. Il explique cette équivalence. |
| Stratégie/Évocation | EE évoque (sans les nommer) que des stratégies peuvent arriver à la même réponse par des chemins différents. |
| Stratégie/Facilité/Difficulté | EE argumente que la stratégie est plus facile ou difficile à comprendre. |
| Stratégie/Généralité | EE argumente qu'une stratégie a un caractère de généralité (e.g. celle de Maxime qui repose sur une règle qui fonctionnera tout le temps). |
| Stratégie/Incompréhension | EE manifeste son incompréhension face à une stratégie. |
| Stratégie/Méthode avancée/savante | EE mentionne que la stratégie lui paraît trop avancée (e.g. EE indique à Amélie qu'elle « *s'est compliquée la vie* ») |
| Stratégie/Organisation | EE fait référence à l'organisation des étapes de résolution dans la production ou la stratégie pour prendre position. |
| Stratégie/Plus d'informations | EE indique qu'une stratégie contient plus d'informations. |
| Stratégie/Raisonnement | EE décrit les raisonnements sous-jacents aux stratégies. Il va plus loin que l'évocation ou la comparaison. |
| Stratégie/Refus de l'essais-erreurs | EE refuse la stratégie d'essais-erreurs pour trouver la mesure du côté. |
| Stratégie/Simplicité/Complexité | EE argumente que la stratégie contient moins d'étapes de résolution et est donc plus simple ou qu'elle en contient trop et est alors trop complexe. |

[100] Pour assurer une validité des catégories, à partir de la situation de l'*Enseignant*, toutes les catégories ont été contre-codées par le chercheur et sa directrice.

## Annexe 9 - Journal de bord de l'enseignante

| | |
|---|---|
| **TITRE DE LA SITUATION:** | |

Indiquez votre appréciation par rapport à chacune des affirmations suivantes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Et si la situation était à refaire … | | | |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| | | | |
| 1. | La situation proposée présentait **un enjeu** et **un défi** pour l'élève. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| | | | |
| 2. | La situation proposée permettait une mobilisation de **savoirs mathématiques** pertinents pour le 1er cycle du secondaire. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| | | | |
| 3. | La situation proposée permettait le développement d'aspects liés **à la compétence à communiquer en mathématiques**. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Lesquels ? Lesquels étaient absents à votre avis ? | | | |
| 4. | La situation proposée vous a permis **d'avancer dans votre enseignement**. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |

<table>
<tr><td colspan="5" align="center">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="4">Les productions de mes élèves dans cette situation m’ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des <u>ajustements dans mon enseignement</u> ou que je devrai faire un <u>retour en arrière</u> avec mes élèves ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="5" align="center">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="5">Quels éléments ont permis une certaine prise de conscience ?<br>Comment ajusterai-je mon enseignement après avoir pris conscience de cet élément ?<br>Pourquoi devrai-je revenir en arrière avec mes élèves après avoir observé certains éléments de leurs productions ?</td></tr>
</table>

## Annexe 10 - Réponses de l'enseignante extraites de son journal de bord pour chacune des questions a posteriori de la réalisation des situations

| | |
|---|---|
| **TITRE DE LA SITUATION:** | Les *Allumettes* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Et si la situation était à refaire … | | | |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Je demanderais peut-être d'abord aux élèves de décortiquer le dessin en trouvant ce qui se répète.<br>Il serait intéressant de faire une petite séquence en équipe pour « débloquer » les élèves qui se lancent dans un essai-erreur sans fin.<br>Je mettrais un nombre beaucoup plus grand que 97 (ex : 423) pour que ce soit décourageant de se lancer dans l'essai-erreur. | | | |
| 1. | La situation proposée présentait **un enjeu** et **un défi** pour l'élève. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Le défi était surtout d'expliquer correctement, avec les bons termes, leur raisonnement. | | | |
| 2. | La situation proposée permettait une mobilisation de **savoirs mathématiques** pertinents pour le 1er cycle du secondaire. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Certains ont bien algébrisé leur raisonnement.<br>On voit que l'idée de trouver une règle commence à être un automatisme pour un grand nombre d'élèves. Ils semblent remarquer que l'essai-erreur a ses limites.<br>Parfois, ils m'expliquent leur raisonnement qu'en mots, mais cela est juste et bien dit même s'il n'y a pas de variable écrite. | | | |
| 3. | La situation proposée permettait le développement d'aspects liés **à la compétence à communiquer en mathématiques**. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |

| **Vos commentaires** | | | |
|---|---|---|---|
| *Lesquels ? Lesquels étaient absents à votre avis ?*<br>« Produire des messages à caractère mathématique » était bien exploité ici. Plusieurs façons différentes pour expliquer ses idées étaient possibles.<br>Il aurait pu être intéressant de faire un partage afin que les élèves puissent juger des règles produites par leurs camarades. | | | |
| 4. | La situation proposée vous a permis **d'avancer dans votre enseignement**. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **Vos commentaires** | | | |
| Le fait que certains élèves arrivent à trouver la réponse en ne passant pas par la table de valeurs et la méthode enseignées pour trouver la règle m'a permis de réaliser que je devrais m'attarder à ses façons de penser davantage dans le futur.<br>Je pourrai par la suite faire un lien entre les différentes règles trouvées en montrant qu'en bout de ligne, elles sont des expressions équivalentes. | | | |
| 5. | Les productions de mes élèves dans cette situation m'ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des **ajustements dans mon enseignement** ou que je devrai faire un **retour en arrière** avec mes élèves ? | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **Vos commentaires** | | | |
| *Quels éléments ont permis une certaine prise de conscience ?*<br>*Comment ajusterai-je mon enseignement après avoir pris conscience de cet élément ?*<br>*Pourquoi devrai-je revenir en arrière avec mes élèves après avoir observé certains éléments de leurs productions ?*<br>Plusieurs ont vu la régularité comme étant 4. Je devrai donc revenir sur le concept de la règle à partir d'une suite (plusieurs disent « au premier on compte 4 » puis on compte toujours trois de plus et trouve la règle 3n + 4).<br>De plus, j'ai remarqué que peu d'élèves effectuent une vérification de leur règle. J'aimerais développer chez eux cette habitude. | | | |

| **TITRE DE LA SITUATION:** | Le *Magicien* |
|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Et si la situation était à refaire … | | | |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Je la ferais après avoir vu le chapitre de l'algèbre. En effet, cette situation a été présentée avant le chapitre 13 qui traite de la méthode de résolution algébrique ce qui m'a permis de l'utiliser pour renforcer l'utilité de l'algèbre.<br>J'aurais toutefois trouvé davantage pertinent que mes élèves s'affairent à manipuler des expressions algébriques plutôt qu'à passer plusieurs minutes à tester le tour de magie avec divers nombres. | | | |
| 1. La situation proposée présentait **un enjeu** et **un défi** pour l'élève. | | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| L'intérêt des élèves était palpable dès la fin de la lecture. Ils voulaient trouver le truc. Ils se sont rapidement mis en action, mais ils ont été confrontés à leur manque de connaissances pour réussir à élaborer une solution. | | | |
| 2. La situation proposée permettait une mobilisation de **savoirs mathématiques** pertinents pour le 1er cycle du secondaire. | | | |
| Tout-à-fait en accord (selon le moment de passation) | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Toujours dans le même ordre d'idées, oui, la situation aurait pu faire travailler mes élèves sur des manipulations algébriques pertinentes et voire même poussées, mais comme ils n'avaient pas encore beaucoup pratiqué la résolution algébrique, celle-ci n'a pas été beaucoup exploitée.<br>J'aurais pensé que, même avant d'avoir vu le chapitre 13, ils se débrouilleraient mieux dans cette tâche. J'ai vu que non. | | | |
| 3. La situation proposée permettait le développement d'aspects liés **à la compétence à communiquer en mathématiques**. | | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| J'ai remarqué qu'au niveau du respect des règles et des conventions propres au langage mathématique, cette situation m'a permis de m'apercevoir que le concept d'égalité était à revoir. | | | |

<table>
<tr><td colspan="4">Beaucoup d'élèves écrivaient la chaîne d'opérations en mettant des « = » après chaque opération (ex : 6 + 10 = 16/2 = 8 – 4 = 2)<br><br>On pouvait exploiter avec cette situation l'utilité des variables pour produire des messages qui fonctionnent pour tous les nombres au lieu de faire une multitude d'exemples.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="3">La situation proposée vous a permis <u>d'avancer dans votre enseignement</u>.</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">J'aurais avancé davantage si les élèves avaient algébrisé dès le départ plutôt que remplacé par divers nombres. Cette démarche ne menait à rien (ou presque) et prenait beaucoup de temps.<br><br>Peut-être aurait-il été intéressant de donner une piste vers l'algèbre après plusieurs minutes d'essais-erreurs ?</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="3">Les productions de mes élèves dans cette situation m'ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des <u>ajustements dans mon enseignement</u> ou que je devrai faire un <u>retour en arrière</u> avec mes élèves ?</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Quels éléments ont permis une certaine prise de conscience ?<br><br>Comment ajusterai-je mon enseignement après avoir pris conscience de cet élément ?<br><br>Pourquoi devrai-je revenir en arrière avec mes élèves après avoir observé certains éléments de leurs productions ?<br><br><br>Je reviendrai sur le concept d'égalité en faisant pratiquer mes élèves à traduire sous forme de chaînes d'opérations les énoncés plutôt que mettre un « = » après chaque opération.<br><br>J'irai de l'avant avec la méthode de résolution algébrique.<br><br>Peut-être aurai-je le temps de passer à nouveau cette situation en juin pour voir enfin un travail d'algèbre à travers celle-ci. Je pense que, même s'ils ont eu l'explication, ils trouveraient avantage à se remettre au travail et le mettre à terme.</td></tr>
</table>

| **TITRE DE LA SITUATION:** | *L'Enseignant* |
|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Et si la situation était à refaire … | | | |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| J'aimerais exploiter l'élaboration de règle à partir d'illustrations comme les miroirs en présentant d'abord une série d'autres illustrations pour offrir une gradation du niveau de difficulté (ex : les allumettes; des tables de restaurant, etc.…puis les miroirs).<br>J'exploiterais les diverses solutions trouvées par les élèves et je tenterais de montrer l'équivalence entre chacune avec des manipulations d'expressions algébriques. | | | |
| 1. | La situation proposée présentait **un enjeu** et **un défi** pour l'élève. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Ce problème était difficile pour plusieurs de mes élèves. Certains ne semblaient pas suffisamment comprendre pour être capables de se prononcer sur la meilleure solution. | | | |
| 2. | La situation proposée permettait une mobilisation de **savoirs mathématiques** pertinents pour le 1[er] cycle du secondaire. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Comme plusieurs ne comprenaient pas bien, ils ne saisissaient pas qu'il y avait plusieurs solutions possibles.<br>Je trouve qu'un biais est apparu du fait que j'ai enseigné l'algèbre tel que l'indique PANORAMATH en 1 et 2 en abordant les suites. La créativité pour trouver des solutions a été freinée selon moi puisque la majorité commençait avec les tables de valeurs telles que vues. Ce n'est pas faux, mais cela ne permet pas de répertorier un grand nombre de solutions différentes et de percevoir l'effort de les communiquer.<br>En utilisant davantage de situations de la sorte (et non les suites) pour introduire l'algèbre, je pourrais mobiliser davantage de savoirs. | | | |

<table>
<tr><td>3.</td><td colspan="3">La situation proposée permettait le développement d’aspects liés <u>à la compétence à communiquer en mathématiques</u>.</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">L’aspect « interpréter des messages à caractère mathématique » était bien exploité. Plusieurs élèves ont travaillé fort à commenter les solutions proposées.<br><br>Certains élèves ont aussi bonifié leur solution après avoir étudié les solutions proposées (aspect : production d’un message).<br><br>J’ai été cependant étonnée de voir que certains continuaient de penser que leur solution était juste malgré qu’ils disent comprendre les deux autres (ces derniers ont moins bien exploité la régulation d’une communication mathématique).</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="3">La situation proposée vous a permis <u>d’avancer dans votre enseignement</u>.</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Étant donné le biais précédemment mentionné en 2, mes élèves ont peu appris avec cette situation. Cependant, en mettant de côté les suites pour introduire l’algèbre, je pouvais exploiter différemment cette situation et provoquer davantage de prises de conscience de la part de mes élèves.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="3">Les productions de mes élèves dans cette situation m’ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des <u>ajustements dans mon enseignement</u> ou que je devrai faire un <u>retour en arrière</u> avec mes élèves ?</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Quels éléments ont permis une certaine prise de conscience ?<br><br>Comment ajusterai-je mon enseignement après avoir pris conscience de cet élément ?<br><br>Pourquoi devrai-je revenir en arrière avec mes élèves après avoir observé certains éléments de leurs productions ?<br><br>Oui, je trouve qu’en abordant l’algèbre à l’aide des suites, les élèves appliquent l’algorithme pour trouver la règle sans toujours comprendre le sens de l’expression algébrique trouvée.<br><br>Je m’efforcerai à l’avenir de leur soumettre un plus grand nombre de situations permettant de « créer » une formule sans suivre d’algorithme et d’exploiter les différentes solutions trouvées.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **TITRE DE LA SITUATION:** | La *Balance* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Et si la situation était à refaire … | | | |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| La seule chose que je modifierais est la formulation de la question « Peux-tu comparer… » qui a semé la confusion chez plusieurs élèves malgré le fait que nous ayons précisé de la changer pour « compare ». | | | |
| 1. | La situation proposée présentait **<u>un enjeu</u>** et **<u>un défi</u>** pour l'élève. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| La progression du niveau de difficulté de a) à c) était très bien. La majorité trouvait aisément a) et « acceptait » donc de poursuivre la tâche.<br>La c) permettait de bien différencier ceux qui avaient le bon raisonnement de ceux qui ne l'avait pas. | | | |
| 2. | La situation proposée permettait une mobilisation de **<u>savoirs mathématiques</u>** pertinents pour le 1er cycle du secondaire. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Oui, vraiment. J'ai beaucoup aimé cette situation. Les élèves se sont mis en action rapidement : la tâche semblait signifiante pour eux.<br>Les notions d'algèbre étaient exploitées différemment, mais étaient perceptibles même dans les explications en mots des élèves. | | | |
| 3. | La situation proposée permettait le développement d'aspects liés **<u>à la compétence à communiquer en mathématiques</u>**. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |

<table>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Les élèves ont produit des messages à caractère mathématique très pertinents et surtout « dans leurs propres mots ».<br>Cette situation permet aux élèves de s’exprimer avec le langage mathématique d’une manière naturelle (« tu enlèves 4 bols de chaque côté », etc.).<br>L’image de la balance est forte pour exprimer le sens de l’égalité.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="3">La situation proposée vous a permis <u>d’avancer dans votre enseignement</u>.</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Je vais reprendre cette idée l’an prochain. J’avais souvent utilisé la balance auparavant, mais seulement pour modéliser les opérations à faire de chaque côté.<br>Là, j’irais plus dans une activité d’intro avec cette activité et je pourrais en créer de semblables tout au long de l’apprentissage des équations.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="3">Les productions de mes élèves dans cette situation m’ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des <u>ajustements dans mon enseignement</u> ou que je devrai faire un <u>retour en arrière</u> avec mes élèves ?</td></tr>
<tr><td>Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="4">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="4">Quels éléments ont permis une certaine prise de conscience ?<br>Comment ajusterai-je mon enseignement après avoir pris conscience de cet élément ?<br>Pourquoi devrai-je revenir en arrière avec mes élèves après avoir observé certains éléments de leurs productions ?<br>Il serait intéressant que je reprenne une situation semblable et que nous fassions le parallèle avec les équations algébriques dans les résolutions de problèmes qui sont vraiment le nerf de la guerre, surtout pour mes élèves du groupe régulier.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **TITRE DE LA SITUATION:** | Le *Déménagement* |

L'enseignante était absente lors de la passation. Elle n'a donc pas fait de retour dans son journal de bord sur cette situation. Elle s'en est excusée.

| | |
|---|---|
| **TITRE DE LA SITUATION:** | Les *Équations* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Et si la situation était à refaire … | | | |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Je demanderais aux élèves de procéder à la vérification de la réponse trouvée pour chacun des 2 élèves. Dans la situation 1, plusieurs ont tenté de résoudre, mais n'y sont pas parvenus ou ont dit arriver à la même réponse que Mylène. S'ils avaient eu à vérifier, ils auraient peut-être trouvé que ni l'une, ni l'autre des deux réponses ne permettaient de vérifier l'égalité parfaitement et quelques-uns auraient poussé plus loin leur raisonnement.<br>J'aurais peut-être modifié la question en demandant d'identifier les erreurs dans les solutions. Plusieurs l'ont fait sans que cela ne soit demandé, mais certains auraient pu préciser davantage la justification de leur choix. | | | |
| 1. | La situation proposée présentait **un enjeu** et **un défi** pour l'élève. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
| **VOS COMMENTAIRES** | | | |
| Les élèves ne sont pas habitués de voir 2 solutions pour la même équation. Je leur enseigne souvent d'une manière, sans en présenter d'autres. Il était parfois difficile pour eux d'être confrontés à 2 solutions sur lesquelles se prononcer. | | | |
| 2. | La situation proposée permettait une mobilisation de **savoirs mathématiques** pertinents pour le 1er cycle du secondaire. | | |
| Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |

<table>
<tr><td colspan="5">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="5">Plusieurs ont semblé prendre conscience de l'importance d'écrire toutes les étapes pour que le raisonnement soit plus facile à comprendre.<br><br>J'ai remarqué que plusieurs élèves disaient ne pas comprendre les solutions proposées, mais ne cherchaient pas à identifier les erreurs « avec ardeur ». Ces mêmes situations pourraient être présentées à nouveau avec d'autres solutions et cela permettrait encore une mobilisation des savoirs (en particulier les équations équivalentes).</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="4">La situation proposée permettait le développement d'aspects liés <u>à la compétence à communiquer en mathématiques</u>.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="5">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="5">Cette situation est une belle opportunité de confronter sa compréhension du message en émettant son point de vue.<br><br>Cela permet également de juger de la pertinence des moyens employés au regard de la compréhension de l'interlocuteur.<br><br>Mes élèves ont mentionné à plusieurs reprises que les étapes de résolution n'étaient pas suffisamment précisées dans les solutions proposées. Il s'agit là d'une belle prise de conscience à mon sens.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="4">La situation proposée vous a permis <u>d'avancer dans votre enseignement</u>.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
<tr><td colspan="5">VOS COMMENTAIRES</td></tr>
<tr><td colspan="5">Les réponses de mes élèves m'ont permis de m'apercevoir que certains sont plus portés vers un type de démarche alors que d'autre vont en préférer une autre. Il m'apparaît donc pertinent de toujours présenter plusieurs solutions possibles à mes élèves pour une même équation. Ainsi, je crois que cela augmentera le sens de la démarche aux yeux des élèves et évitera la simple application d'un algorithme.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="4">Les productions de mes élèves dans cette situation m'ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des <u>ajustements dans mon enseignement</u> ou que je devrai faire un <u>retour en arrière</u> avec mes élèves ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tout-à-fait en accord</td><td>En accord</td><td>Plus ou moins en accord</td><td>En désaccord</td></tr>
</table>

| **VOS COMMENTAIRES** |
| --- |
| *Quels éléments ont permis une certaine prise de conscience ?*<br>*Comment ajusterai-je mon enseignement après avoir pris conscience de cet élément ?*<br>*Pourquoi devrai-je revenir en arrière avec mes élèves après avoir observé certains éléments de leurs productions ?*<br>Je veillerai, lors d'activités de révision, à faire proposer des pistes de solutions différentes par les élèves afin, d'une part, d'identifier la démarche que la majorité privilégie et, d'autre part, rejoindre aussi les élèves qui auraient choisi un chemin différent et mener à terme leur raisonnement. |

## Annexe 11 - Synthèse des appréciations globales de l'enseignante pour chaque question posées dans le journal de bord pour chacune des situations

*Tableau 25 - Appréciation globale de l'enseignante à chacune des questions posées dans le journal de bord pour chaque situation*

| Situations | Tout-à-fait en accord | En accord | Plus ou moins en accord | En désaccord |
|---|---|---|---|---|
| | **1. La situation proposée présentait <u>un enjeu</u> et <u>un défi</u> pour l'élève.** | | | |
| *Allumettes* | | | | |
| *Magicien* | | | | |
| *Enseignant* | | | | |
| *Balance* | | | | |
| *Déménagement* | *Aucun commentaire de la part de l'enseignante* | | | |
| *Équations* | | | | |
| | **2. La situation proposée permettait une mobilisation de savoirs mathématiques pertinents pour le 1er cycle du secondaire.** | | | |
| *Allumettes* | | | | |
| *Magicien* | | | | |
| *Enseignant* | | | | |
| *Balance* | | | | |
| *Déménagement* | *Aucun commentaire de la part de l'enseignante* | | | |
| *Équations* | | | | |
| | **3. La situation proposée permettait le développement d'aspects liés à la compétence à communiquer en mathématiques.** | | | |
| *Allumettes* | | | | |
| *Magicien* | | | | |
| *Enseignant* | | | | |
| *Balance* | | | | |
| *Déménagement* | *Aucun commentaire de la part de l'enseignante* | | | |
| *Équations* | | | | |
| | **4. La situation proposée vous a permis d'avancer dans votre enseignement.** | | | |
| *Allumettes* | | | | |
| *Magicien* | | | | |
| *Enseignant* | | | | |
| *Balance* | | | | |
| *Déménagement* | *Aucun commentaire de la part de l'enseignante* | | | |
| *Équations* | | | | |
| | **5. Les productions de mes élèves dans cette situation m'ont permis de prendre conscience que je devrai apporter des ajustements dans mon enseignement ou que je devrai faire un retour en arrière avec mes élèves ?** | | | |
| *Allumettes* | | | | |
| *Magicien* | | | | |
| *Enseignant* | | | | |
| *Balance* | | | | |
| *Déménagement* | *Aucun commentaire de la part de l'enseignante* | | | |
| *Équations* | | | | |

## Annexe 12 - Lettre d'acceptation de l'expérimentation de la Commission scolaire Marguerite-Bourgeoys

COMMISSION SCOLAIRE MARGUERITE-BOURGEOYS

**Secrétariat général**

1100, bd de la Côte-Vertu
Saint-Laurent (Québec) H4L 4V1
Tél. : 514 855-4500, poste 4522
Téléc. : 514 788-1975

Le 7 septembre 2012

PAR COURRIER ÉLECTRONIQUE

Philippe.labrosse@csmb.qc.ca
Philippe Labrosse
Candidat au doctorat - Didactique
Faculté des sciences de l'éducation
Université de Montréal

**OBJET : Projet de recherche « Conception et mise à l'essai d'une famille de situations relatives au développement de la compétence à communiquer en mathématiques destinée à des élèves du premier cycle du secondaire»**
***Notre référence : 6.12.350***

Monsieur,

Nous avons reçu votre demande de participation au projet de recherche cité en rubrique le 8 août 2012 puis des compléments d'informations et des versions amendées de vos formulaires de consentements les 6 et 7 septembre 2012.

Après étude de vos documents, je vous autorise à procéder à votre projet de recherche à la condition que vous utilisiez les nouvelles versions des formulaires de consentement que vous nous avez fournies, soit celles avec les consentements distincts.

Veuillez prendre note que cette autorisation vous est accordée en autant que vous respectiez les conditions suivantes :

- Vous devez assurer la confidentialité des renseignements nominatifs que vous recevrez;
- Vous devez faire signer un engagement à la confidentialité aux membres de l'équipe de recherche qui n'ont pas signé le formulaire de demande d'autorisation et à toute autre personne qui s'ajoutera, par la suite, à cette équipe;
- Vous devez utiliser les renseignements recueillis uniquement pour cette recherche particulière et à aucune autre fin;
- Dans vos rapports, vous ne devez pas publier un renseignement permettant d'identifier un individu;
- À la fin du projet, vous devez détruire de façon confidentielle tous les renseignements personnels qui ont pu être recueillis tout au long du processus, sans oublier les enregistrements vidéo et leur retranscription, et en fournir la preuve à la Commission scolaire;
- Vous ne devez pas communiquer un renseignement reçu à d'autres personnes que celles qui sont autorisées à le recevoir dans le cadre de cette recherche.

Une lettre sera envoyée à la direction de l'école secondaire Des Sources l'avisant de notre autorisation. Il est opportun de vous rappeler que la décision ultime de participer ou non à votre projet appartient toujours à la direction, aux enseignants et aux parents.

Nous espérons que les données recueillies satisferont à vos besoins et nous vous exprimons notre désir de recevoir votre rapport de recherche.

Veuillez agréer, Monsieur, l'expression de nos salutations distinguées.

La secrétaire générale par intérim,

Marie-Josée Villeneuve

Marie-Josée Villeneuve
VL/
c.c. : Jean-Pierre Bédard, directeur général adjoint – réseau A
Michel Laplante, directeur du service des ressources éducatives

## Annexe 13 - Analyse spécifique des stratégies mathématiques pour l'ensemble des situations

### 13.1 Les stratégies mathématiques pour la situation des *Allumettes*

La diversité et la pertinence des stratégies déployées par les élèves témoignent d'une réelle activité mathématique dans la situation des *Allumettes*. Le tableau 26 présente les fréquences des stratégies/règles dominantes repérées dans les groupes pour les questions a) et c) la dernière étant une généralisation de la première.

Certains élèves utilisent le développement d'une table de valeurs pour trouver le nombre d'allumettes d'un terme donné pour la sous-question a) ne sentant pas la nécessité de généraliser pour répondre à la sous-question. Toutefois, à la question c), quelques-uns de ces mêmes élèves recourent à une règle pour généraliser une façon de trouver le nombre d'allumettes connaissant le rang.

Ainsi, dans le tableau 26, il apparaît plus pertinent de dénombrer les occurrences plutôt que le nombre d'élèves qui mobilisent les stratégies puisque six élèves au total des deux groupes utilisent deux stratégies. L'effectif total des stratégies dépasse donc le nombre de sujets participant à la recherche.

*Tableau 26 – Règles utilisées en réponse aux questions a) et c) de la situation des Allumettes*

| **Stratégies adéquates ou partiellement adéquates** | **Fréquence** |
|---|---|
| Utilise la forme canonique pour trouver la règle 3n +1 | 21 |
| Raisonnement construit à partir de la règle 4 + 3(n – 1) sans erreur | 4 |
| Raisonnement construit à partir de la règle 4 + 3(n – 1) avec une erreur de calcul en a) | 2 |
| Fait une série d'essais sans règle apparente et sans erreurs | 6 |
| Fait une série d'essais sans règle apparente et avec une erreur | 1 |
| Raisonnement construit à partir de la règle 4n - (n – 1) sans erreur | 3 |
| Raisonnement construit à partir de la règle 4n - (n – 1) avec une erreur de calcul en a) | 1 |
| **Fréquence de l'ensemble des stratégies adéquates ou partielles :** | **38** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | |
| Raisonnement construit à partir de la règle 3n + 4 | 9 |
| Raisonnement construit à partir de la règle 4n | 4 |
| Raisonnement construit à partir de la règle 3n | 4 |
| Aucune réponse | 3 |
| **Fréquence de l'ensemble des stratégies inadéquates :** | **20** |
| **Fréquence de l'ensemble des stratégies :** | **58** |

Pour la sous-question b), les stratégies suivantes sont principalement repérées :

- faire des opérations inverses à partir de la règle déterminée pour a) et c) et ce, même si la règle est erronée;
- faire des essais, contrôlés ou non, dans la règle déterminée pour a) et c) et ce, même si la règle est erronée en remplaçant la variable;
- compléter une table de valeurs en essayant des valeurs de « rang » jusqu'à l'obtention de 46 allumettes.

L'analyse des copies des élèves[101] montre que l'enseignante a déjà enseigné la technique « canonique » pour trouver le terme en fonction du rang, technique à laquelle nous référions dans l'analyse a priori.

Des stratégies reposant sur d'autres règles sont aussi observées. Quatre élèves utilisent une stratégie renvoyant à 4n-(n-1), tel qu'anticipé dans l'analyse a priori. Six élèves recourent à la règle 4+3(n-1) assez proche de la stratégie canonique, mais qui en diffère par l'idée que l'on raisonne à partir du premier dessin qui est montré (celui du rang 1).

Les élèves qui utilisent la règle 4n-(n-1) ont plus de difficulté à résoudre la question b). En effet, il est difficile pour eux d'isoler le terme « n » puisqu'il faut agir sur deux termes en même temps dans la règle : sur la quantité « n », multipliée par 4, et la quantité « n-1 », représentant les allumettes à retirer.

La stratégie inadéquate la plus observée s'appuie sur la règle « 3n+4 »[102] qui associe le terme au rang « 0 » au premier terme de la suite (le carré avec 4 allumettes), le n représentant alors le nombre de carrés ajoutés au premier. Quatre élèves semblent aussi amorcer une solution allant dans le sens de la stratégie canonique, mais se limitent à travailler avec la règle « 3n » en oubliant le terme au rang « 0 ».

La diversité des raisonnements mis en œuvre par l'ensemble élèves, jumelée au fait que seulement 3 élèves n'ont pas donné de réponse, permet de conclure que cette situation a donné lieu à une activité mathématique importante et pertinente.

## 13.2 Les stratégies mathématiques pour la situation du *Magicien*

Rappelons que les élèves ont d'abord réalisé individuellement la situation du *Magicien* pour ensuite être placés en équipes de deux afin de partager leur résolution personnelle et d'en produire une commune (sur une autre feuille). Trois équipes étaient ciblées par l'enseignante afin que leurs interactions soient enregistrées pendant la phase de réalisation.

Les élèves se sont manifestement engagés dans la phase de réalisation. En effet, la thématique de la situation et le défi posé par l'explication du truc de magie amènent les élèves avec enthousiasme dans une série d'essais numériques, allant de l'essai unique, à l'expérience cruciale.

Plusieurs stratégies sont observées, tant individuellement que pour la phase dyadique. Elles sont résumées dans le tableau 27 pour la sous-question a) et dans le tableau 28 pour la sous-question b)[103]. Notons

[101] La **figure 57** montre une copie-type d'élève qui mobilise cette stratégie.
[102] Nous qualifions cette stratégie « d'inadéquate » car les élèves qui l'ont mobilisée ne sont pas arrivés à la bonne réponse puisqu'ils ont considéré la variable « n » comme étant égal au rang du terme recherché. Or, la stratégie pourrait permettre d'arriver à la bonne réponse si l'on considère, à chaque bond, un ajout de « 3(n-1) » allumettes (on ajoute « n-1 » trios d'allumettes à chaque terme, où « n » représente le rang du terme recherché. Ainsi, au deuxième rang, on ajoute 3 allumettes aux 4 allumettes du premier terme. Au troisième rang, on ajoute 6 allumettes au premier terme, etc.
[103] Sous-question a) : *Explique mathématiquement pourquoi il ne s'agit pas de magie.* Sous-question b) *: Invente un « truc de magie » en cinq étapes qui amènerait toutes tes « victimes » avec un résultat final de 20. Explique ensuite par écrit pourquoi ton truc fonctionne.*

qu'un élève qui fait un « essai unique » est jugé sur la bonne voie, mais ne peut se classer sous la « stratégie adéquate » sans présence d'une généralisation. De même, un élève qui affirme une certaine généralisation sans montrer les traces qui mènent à sa conclusion est placé sous une stratégie « partiellement adéquate ».

*Tableau 27 - Compilation des stratégies pour la sous-question a) de la situation du Magicien*

| Stratégies adéquates ou partiellement adéquates | Occ. indiv. | Occ. équipes |
|---|---|---|
| ***Essais numériques :*** | | |
| - unique | 19 | 2 |
| - unique, mais avec une amorce de généralisation | 2 | 0 |
| - unique avec un grand nombre (expérience cruciale) | 1 | 0 |
| - multiples (empirisme naïf) | 9 | 4 |
| - multiples avec de grands nombres (expérience cruciale) | 2 | 0 |
| - multiples avec de petits nombres, mais amorce une généralisation | 1 | 0 |
| - multiples avec de grands nombres et amorce une généralisation (expérience cruciale) | 2 | 1 |
| ***Explications en mots :*** | | |
| - basée sur une amorce algébrique | 0 | 1 |
| - affirmation seulement, mais avec présence d'une généralisation | 3 | 1 |
| **Total stratégies adéquates ou partielles :** | **39** | **9** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | | |
| Affirmation seulement | 7 | 6 |
| Aucune réponse | 7 | 12 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **14** | **18** |
| **Total des stratégies :** | **53** | **27** |

L'ensemble des stratégies adéquates ou partiellement adéquates reposent pour la plupart sur des essais. L'essai unique consiste à montrer que le truc de magie fonctionne pour un nombre et à conclure qu'il doit fonctionner pour l'ensemble des nombres. Il s'agit de la stratégie individuelle repérée le plus souvent dans les deux groupes : 19 sujets individuels sur un total de 53. Certaines variantes de cet essai unique sont constatées. En effet, deux sujets font un seul essai, mais amorcent une explication laissant présager une certaine généralisation. À titre d'exemple, le sujet # 8, après avoir fait un seul essai, conclut en disant : « *...le truc fonctionne, car les nombres que je mets finissent toujours par se diviser ou se soustraire, sauf le nombre que je veux qu'il reste à la fin* ».

D'autres sujets font un ou quelques essais avec un grand nombre ce qui rappelle l'expérience cruciale décrite par Balacheff (1987; 1988) (**section 2.4.1**). Le recours à des expériences cruciales avait d'ailleurs été noté dans le journal de bord du chercheur lors de l'expérimentation: *« Oh my god, ça marche même avec 100! »; « on essaie avec 111111! »; « essaie avec 0,1 »; « essaie avec des fractions »* et même, *« essaie avec la constante π ».*

On observe aussi des essais multiples qui relèvent de « l'empirisme naïf ». En effet, ayant fait fonctionner le truc de magie avec plusieurs nombres, l'élève conclut que le truc fonctionne pour tous les nombres.

Soulignons que les stratégies ayant recours plus explicitement à l'algèbre, présentées dans l'analyse a priori ne sont pas apparues, tel que l'on pouvait s'y attendre.

*Tableau 28 - Compilation des stratégies pour la sous-question b) de la situation du Magicien*

| Stratégies adéquates ou partiellement adéquates | Occ. indiv. | Occ. équipes |
|---|---|---|
| ***Essais numériques :*** | | |
| - unique avec un grand nombre et amorce d'une généralisation | 0 | 1 |
| ***Présentation de 5 étapes comportant :*** | | |
| - des grands nombres et amorce d'une généralisation | 0 | 1 |
| - en divisant le nombre choisi par sa moitié dès le départ | 0 | 1 |
| - des multiplications et division de petits nombres | 2 | 2 |
| - des multiplications et division de petits nombres avec une amorce de généralisation | 0 | 1 |
| - additions et soustractions de petits nombres | 3 | 3 |
| - des additions et soustractions de petits nombres avec une amorce de généralisation | 0 | 2 |
| **Total stratégies adéquates ou partielles :** | **5** | **11** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | | |
| Amorce des étapes sans toutefois conclure | 4 | 0 |
| Présentation de 5 étapes fausses (qui n'arrivent pas à la bonne conclusion) avec présence des 4 opérations | 4 | 1 |
| Présentation de 5 étapes qui ne fonctionnent qu'avec une valeur unique | 2 | 1 |
| Essais multiples sans conclusion | 2 | 4 |
| Affirmation seulement | 0 | 2 |
| Aucune réponse | 36 | 8 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **48** | **16** |
| **Total des stratégies :** | **53** | **27** |

Pour la sous-question b), une catégorisation des stratégies individuelles est tentée. Toutefois, comme le montre le tableau 18 seulement 5 sujets sur 53 ont fourni une réponse. De ces cinq sujets, trois font une série d'additions et de soustractions pour construire leur truc de magie alors que les deux autres varient les opérations en insérant aussi des multiplications et des divisions dans leur truc.

### *13.2.1 L'effet des dyades sur la réalisation des stratégies*

La situation du *Magicien* étant la première proposée où les élèves sont placés en dyades pour une partie de la réalisation, les productions des équipes de travail sont aussi analysées afin de voir si le travail dyadique a un impact sur la réalisation des stratégies adéquates ou partiellement adéquates.

Pour la première partie de la situation où les élèves doivent expliquer le fonctionnement d'un truc de magie, on remarque 39 occurrences individuelles (sur un total de 53 : environ 74%) dans les stratégies adéquates ou partiellement adéquates comparativement à 5 occurrences dyadiques (sur un total de 27 équipes : environ 19%). On constate donc que, pour la sous-question a), le travail d'équipe ne semble pas mener les élèves vers davantage de stratégies adéquates ou partiellement adéquates.

Par contre, pour la deuxième partie de la situation où l'on demande de formuler un truc de magie pour piéger une victime, les résultats obtenus sont différents. Si 5 occurrences individuelles (sur un total de 53 : environ 9%) sont notées pour des stratégies adéquates ou partiellement adéquates, ce nombre passe à 11 (sur un total de 27 équipes : environ 41%) pour les occurrences en équipes. Dans la sous-question b), le travail dyadique semble avoir eu un impact sur la production de stratégies adéquates ou partiellement adéquates. Le travail dyadique amène les élèves à plus de stratégies adéquates ou partiellement adéquates dans la sous-question b) que dans la sous-question a). C'est à croire que les équipes abandonnent l'idée de l'explication mathématique du truc (ils savent que le truc fonctionne) pour tenter de trouver un tour de magie pour piéger (à la sous-question b). Comme hypothèse, on peut penser que les élèves, lorsque placés en dyades, savent que le truc fonctionne et ne trouvent plus pertinent d'expliquer pourquoi. Individuellement, ils ont fait suffisamment d'essais pour se convaincre que le truc fonctionne, soit par un empirisme naïf ou des expériences cruciales. En équipe, leur attention se tourne davantage vers le truc à formuler. Les élèves quittent la phase d'action (qu'ils ont abondamment explorée individuellement par des essais) pour, en équipes, entrer davantage dans une phase de formulation.

On peut aussi se demander si l'enjeu de « piéger une victime » s'avère plus stimulant pour les équipes. L'engagement des équipes dans cette deuxième partie de la situation peut alors s'expliquer par leur souhait de trouver un truc inédit ou complexe qui piège à tout coup. À cet égard, on peut également questionner la posture « d'experts en magie » (élèves-magiciens) adoptée par les élèves. Ce sont eux les magiciens et ils doivent piéger. Non seulement les équipes sont-elles motivées à construire un truc complexe, mais leur position d'élèves-magiciens laisse à penser que leur interlocuteur (ici dans un premier temps « un quidam ») vient susciter leur engagement dans l'élaboration d'un truc de magie. Les élèves-magiciens doivent ensuite reprendre une posture « d'élèves » pour expliquer à l'enseignante pourquoi leur truc fonctionne. Il semble donc se dégager un effet des valeurs des variables « position attribuée à l'élève » et « interlocuteur de l'élève » sur la production de stratégies adéquates ou partiellement adéquates pour la sous-question b).

### 13.3 Les stratégies mathématiques pour la situation de l'*Enseignant*

Dans la situation de *l'Enseignant*, l'élève prend position face à deux solutions d'élèves sur le même problème, soit un problème semblable à celui des *Allumettes*, mais présenté différemment. Les élèves, dans le cadre de la situation de l'*Enseignant*, sont conviés à trois phases de réalisation :

**Phase 1 :** ils doivent résoudre le problème présenté pour faire leur corrigé puisqu'ils sont placés dans la position d'un enseignant (une dizaine de minutes);

**Phase 2 :** ils reçoivent ensuite deux productions d'élèves fictifs (Maxime et Amélie), sur des feuilles distinctes, et ils doivent les analyser et les commenter (ils inscrivent directement leurs commentaires sur les copies des deux élèves);

**Phase 3 :** finalement, ils doivent répondre à deux questions ouvertes[104].

Dans la présente sous-section, c'est principalement sur la première phase que le regard est porté. Les deux autres phases, puisqu'elles concernent des éléments de communication, sont abordées dans le corps de la thèse.

Rappelons que la sous-question a) amène l'élève à généraliser une méthode pour trouver le nombre de carreaux pour faire un encadrement connaissant la mesure « en unités carreaux » du côté d'un miroir. La sous-question b), quant à elle, est une mise en application de la stratégie trouvée en a) : l'élève doit retrouver la mesure du côté du miroir sachant que 88 carreaux sont nécessaires pour faire l'encadrement.

Les stratégies présentées dans les tableaux 29 (pour la sous-question a)) et 30 (pour la sous-question b)) regroupent les différentes règles repérées dans les productions des élèves pour résoudre le problème (c'est-à-dire faire leur corrigé d'enseignant).

*Tableau 29 - Compilation des stratégies pour la sous-question a) de la situation de l'Enseignant*

| **Stratégies adéquates ou partiellement adéquates** | **Occurrence a)** |
|---|---|
| Utilise la forme canonique pour trouver la règle 4n + 4 | 5 |
| Explique la règle 4n + 4 avec des mots | 9* |
| Explique la règle 4n + 4 en faisant un retour à l'unité | 1 |
| Explique la règle 4n + 4 en faisant un schéma | 2 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle (2n+2)•2 | 1 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle 2n+2n+4 | 2* |
| Utilise des calculs pour trouver la règle (n+1)•4 | 1 |
| L'élève fait la différence entre les aires | 4 |
| **Un élève a utilisé ces deux règles dans sa résolution : 4n+4 en mots et 2n+2n+4* | |
| **Total stratégies adéquates ou partielles :** | **25** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | |
| Affirmation seulement de la règle (4n+4) | 2 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle 4n | 3 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle n•n+4 | 1 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle 4n-4 | 3 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle (x-1)•4 | 1 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle (n-2)•4 | 1 |
| Utilise des calculs pour trouver la règle 4n+8 | 1 |
| Indique « côté x côté » | 1 |
| Indique l'équation x/4 = y - 2 | 1 |
| Impossible d'identifier la stratégie ou règle employée | 8 |
| Aucune réponse | 9 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **31** |
| **Total des stratégies :** | **56** |

[104] *Comment pourrais-tu expliquer à la classe le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé la même règle ? Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.*

*Tableau 30 - Compilation des stratégies pour la sous-question b) de la situation de l'Enseignant*

| **Stratégies adéquates ou partiellement adéquates** | **Occurrence b)** |
|---|---|
| Opérations inverses à partir de l'équation (issue de la forme canonique) T = 4n+4=88 | 5 |
| Opérations inverses à partir de l'équation 4n+4=88 (non issue de la forme canonique) | 4 |
| Opérations inverses (non écrite formellement) à partir de la règle 4n+4 et de l'équation (88-4)÷4=21 | 8 |
| Opérations inverses à partir de la méthode de résolution algébrique en 5 étapes à partir de la règle 4x+4=88 | 2 |
| Opérations inverses à partir de l'équation (2n+2)•2=88 | 1 |
| Opérations inverses à partir de l'équation 2n+2n+4=88 | 1 |
| Opérations inverses non écrites formellement à partir de la règle (x-1) •4 | 1 |
| Opérations inverses à partir de l'équation (issue de la forme canonique) T = (x-4)÷4 | 1 |
| Essais et erreurs avec des différences d'aires pour arriver à 88 carreaux | 1 |
| Explications en mots des opérations inverses non-écrites formellement à partir de la règle 4n+4 | 1 |
| **Total stratégies adéquates ou partielles :** | **25** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | |
| Opérations inverses non écrites formellement à partir de la règle 4(n+2) | 1 |
| Opérations inverses non écrites formellement à partir de la règle 4n-4 | 1 |
| Opérations inverses écrites formellement à partir de la règle 4n-4 | 1 |
| Opérations inverses écrites formellement à partir de l'équation 4n=88 | 6 |
| Erreurs dans opérations inverses avec une règle non écrite formellement | 1 |
| Opérations inverses à partir de la règle x/4 = y - 2 | 1 |
| Tentative sans succès de résoudre une équation du second degré (étant donnée la stratégie des diff. d'aires) | 1 |
| Affirmation seulement | 1 |
| Aucune réponse | 17 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **30** |
| **Total des stratégies :** | **55** |

À partir des tableaux 29 et 30, on constate que beaucoup moins d'élèves ont recours à la stratégie canonique pour résoudre le problème comparativement au problème des *Allumettes*. Dans cette dernière situation, 21 sujets ont résolu le problème avec la méthode canonique. Dans la présente situation, seuls cinq élèves l'utilisent pour résoudre la sous-question a). Cela peut s'expliquer par la formulation de la tâche où les dessins sont présentés dans le désordre, (soit avec 3, 7 puis 4 carreaux unité de côté) n'orientant pas les élèves à recourir à une table de valeurs dès le départ contrairement aux dessins (en nombre d'allumettes) de la situation des *Allumettes*. Les élèves semblent davantage portés à décoder les dessins, ce qui les mène vers d'autres stratégies, plus personnelles. Il est aussi surprenant de voir, chez les cinq élèves qui ont tout de même utilisé la stratégie canonique, une valeur initiale de 4 pour le terme au rang 0. Dans le contexte plus concret de l'énoncé présenté, on peut se demander à quoi correspond cette valeur de 4. Il s'agirait en fait des carreaux des quatre coins d'un miroir inexistant puisque possédant un côté de « 0 » unités carreaux.

Par conséquent, le contexte réaliste de la présente situation (la création de l'encadrement d'un miroir) a sans doute encouragé les élèves à s'éloigner de la méthode canonique et à s'engager dans des stratégies plus personnelles, construites à partir des dessins, comparativement au problème moins concret des *Allumettes*.

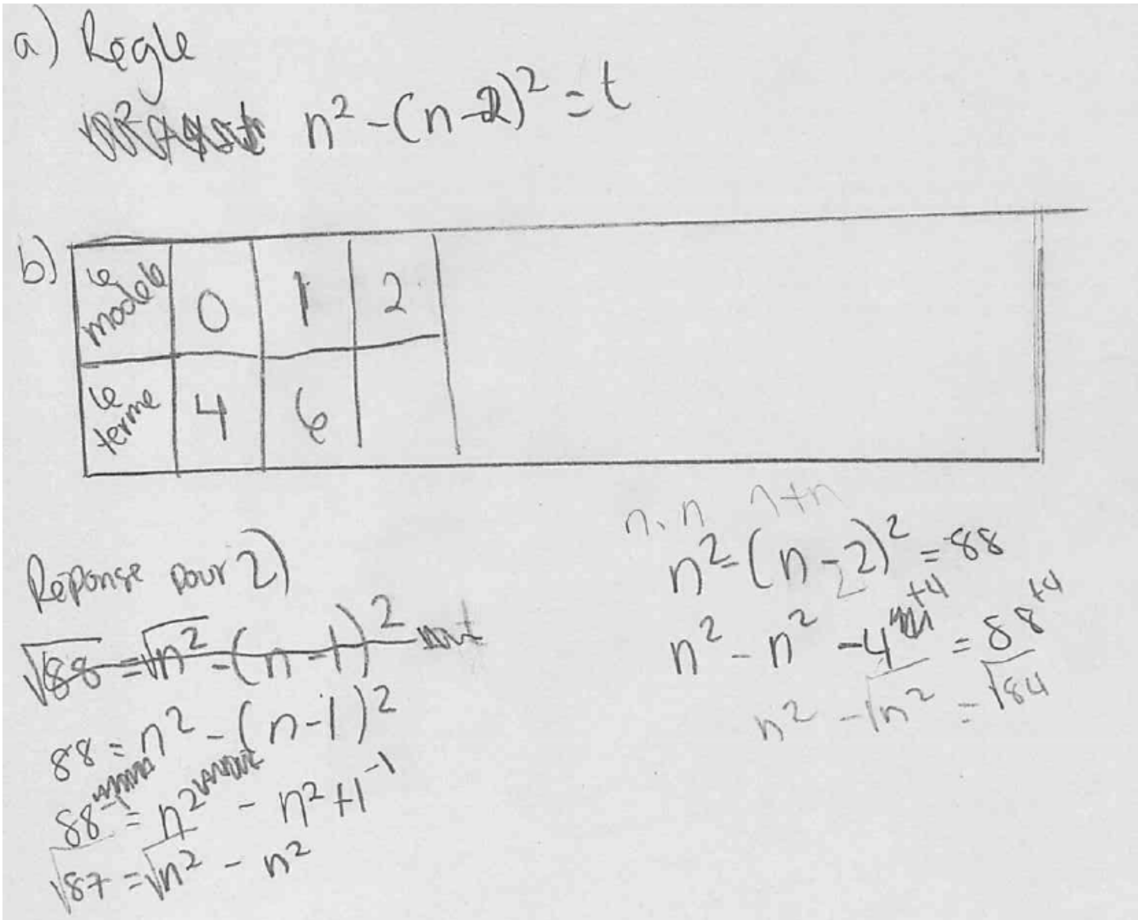
D'autres règles sont repérées dans les productions des sujets, toutes équivalentes algébriquement à 4n+4, mais reposant sur des raisonnements différents. Ainsi, l'élève qui utilise la règle (2n+2)·2 découpe le dessin de l'encadrement en deux parties formant un « L » avec des « branches » de « n+1 » unités carreaux.

Aussi, l'élève utilisant la règle 2n+2n+4 calcule tout d'abord les unités carreaux pour former les côtés du miroir et ajoute ensuite les 4 carreaux aux coins. Ce raisonnement est très similaire à celui de la règle 4n+4 où l'on multiple par 4 les carreaux sur chaque côté tout en ajoutant ensuite les 4 coins.

La règle (n+1)·4 est aussi répertoriée. Celle-ci repose sur un raisonnement découpant l'encadrement en quatre bâtonnets isométriques de « n+1 » carreaux unités.

Enfin, dans les stratégies adéquates, quatre sujets raisonnent en termes d'aires (tout comme l'a fait l'élève-fictive Amélie). Ces derniers commencent par calculer l'aire d'une surface en unités carreaux sans miroir et retirent ensuite l'aire du miroir (à partir du côté qui est connu). Ainsi, la surface restante est celle des unités carreaux qui constituent l'encadrement. Tout comme Amélie, les élèves qui optent pour ce raisonnement ne sont pas en mesure d'isoler dans leur équation, pour la sous-question b), la valeur du côté d'un encadrement de 88 unités carreaux, sauf en recourant à des essais pour s'approcher de la valeur recherchée. Le sujet # 16 du groupe R tente même, en vain, de résoudre l'équation du 2^e^ degré qu'il a posée, mais il se bute rapidement à son manque de connaissances mathématiques pour terminer sa résolution (figure 60).

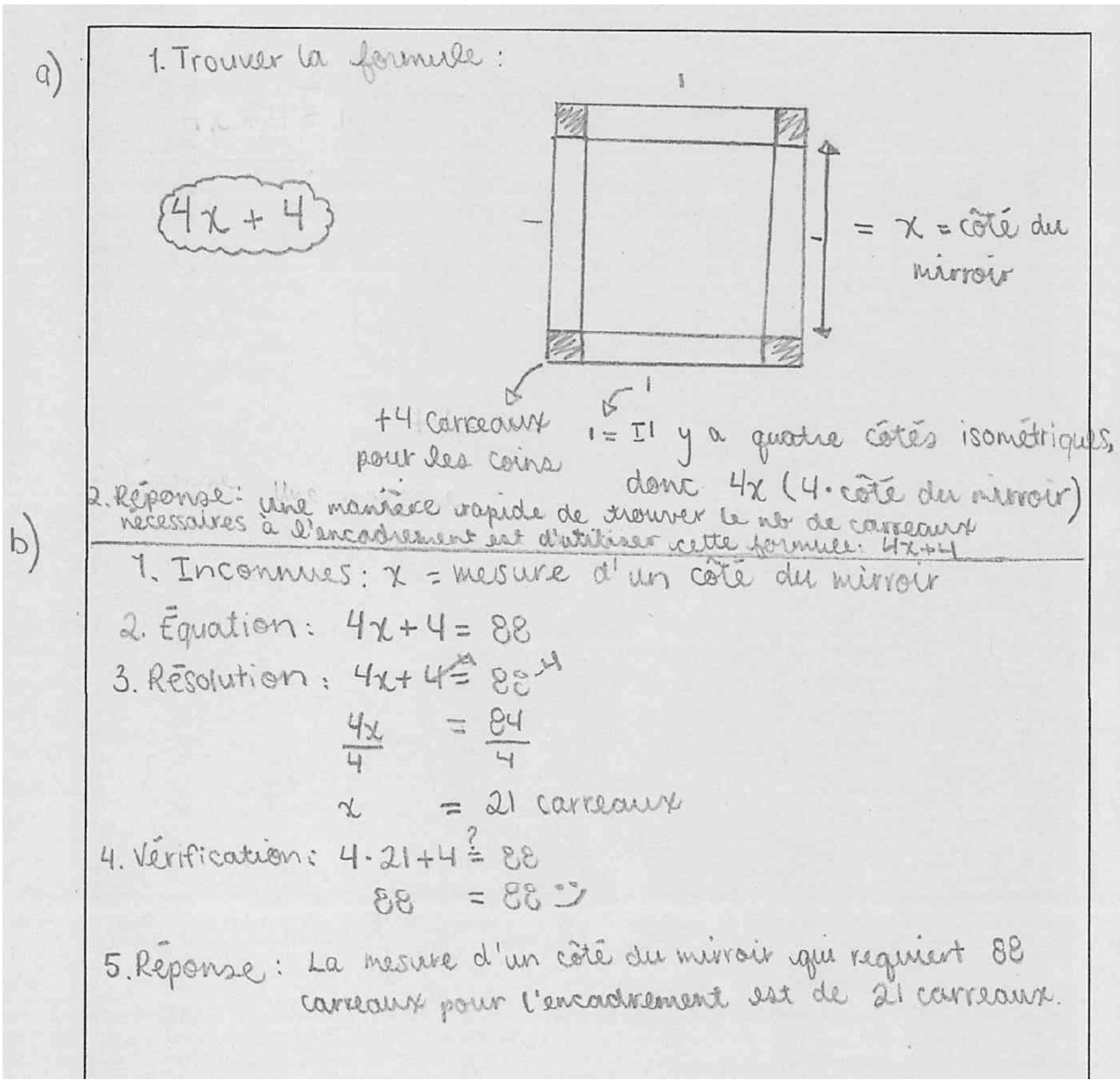
*Figure 61 – Solution du sujet # 16 du groupe R à la situation de l'Enseignant*




Dans les stratégies inadéquates pour la sous-question a), ce sont celles fondées sur les règles « 4n » et « 4n-4 » qui reviennent le plus souvent (une fréquence de 3 pour chacune des deux stratégies). La première stratégie (4n) peut, d'une part, référer à un calcul des carreaux sur les quatre côtés, mais duquel on omet d'ajouter les quatre coins. D'autre part, il peut aussi s'agir d'un calcul fondé sur « *un autre n* » en considérant plutôt ce dernier comme l'ensemble des carreaux sur l'un des côtés. Dans ce cas, certains carreaux aux coins sont répétés dans le calcul « 4 fois n » (quatre carreaux en fait). Ainsi, il faut les enlever et c'est justement de cette manière que certains sont arrivés à la règle 4n-4. Ainsi, dans les deux cas, pour avoir une règle qui utilise un « n » comme étant la mesure du côté du miroir en unités carreaux, il faut écrire la règle de la manière suivante : « 4(n+2) – 4 » ou « 4n + 4 ». Au « n », on ajoute deux carreaux, un à chaque extrémité, on multiplie par 4 pour trouver les carreaux pour les côtés, pour ensuite enlever les quatre extrémités qui se répètent (puisque l'on compte 4 carreaux de trop) par l'opération « -4 ».

Quant à la sous-question b), la plupart des stratégies adéquates reposent sur la maîtrise des opérations inverses dans une équation de la forme « *règle* = 88 » posée parfois implicitement (on devine la règle utilisée, car les élèves se lancent directement dans la résolution arithmétique) ou, d'autres fois, formellement (la règle est explicitement écrite avant que les opérations arithmétiques ne soient réalisées). Deux des sujets utilisent la « méthode de résolution algébrique en cinq étapes » enseignée pour représenter leur solution, comme en fait foi la production du sujet # 5 (figure 61)[105].

*Figure 62 - Solution du sujet # 5 du groupe SÉ à la situation de l'Enseignant*




Analysons maintenant les stratégies effectives des élèves pour les trois autres situations construites principalement, mais non exclusivement, autour de la résolution d'équations.

[105] Il s'agit probablement d'un effet d'un enseignement récent reçu en classe pour résoudre des problèmes algébriques. Étant plongé dans ce type de résolutions, voulant respecter les attentes de l'enseignante, le sujet # 5 reproduit la méthode séquentielle de résolution qui lui est enseignée. Il est intéressant de constater que, dans cette méthode, la quatrième étape est une vérification de la réponse dans la règle posée, forçant ainsi l'élève à poser un regard sur sa réponse, mais aussi à convaincre son interlocuteur.

## 13.4 Les stratégies mathématiques pour la situation de la *Balance*

Rappelons que la situation de la *Balance* se caractérise par les représentations de trois équilibres à l'aide de dessins. Aucun nombre n'est initialement donné aux élèves ce qui présente une exigence supplémentaire pour l'élève puisqu'il doit se trouver des moyens de communiquer avec d'autres registres[106].

Les élèves ont effectivement trouvé des moyens de répondre aux questions qui demandent de comparer les masses d'éléments présents sur les plateaux en équilibre. Les élèves se sont engagés en majorité dans la recherche d'une stratégie (adéquate ou partielle) pour cette situation. En effet, pour les sous-questions a) et b), 40 sujets ont produit un raisonnement sur les 57 sujets alors que ce rapport passe à 28 sur 57 pour la sous-question c). La présentation par un registre en dessins (ici trois équilibres) permet peut-être une entrée dans la résolution par un travail sur le dessin (surtout par l'analyse du premier et troisième équilibre). En s'éloignant ainsi de la présentation classique des problèmes avec du texte et des nombres, le décodage pour certains élèves est probablement favorisé et, par conséquent, ils s'engagent à produire un raisonnement. La valeur de variables retenue, soit de présenter un problème sans données numériques, semble favoriser l'éventail et la richesse des stratégies. Les tableaux 31 (sous-questions a) et b)) et 32 (sous-question c)) présentent l'ensemble des stratégies repérées pour chacune des sous-questions. Le tableau 31 regroupe quatre grandes catégories de stratégies adéquates ou partiellement adéquates : le recours à l'algèbre; les explications en mots, le travail sur les dessins et la fixation d'un poids fictif.

[106] Bien que l'élève puisse aussi revenir au registre des calculs et des nombres en s'imposant des valeurs fictives de poids.

*Tableau 31 - Compilation des stratégies pour les sous-questions a) et b) de la situation de la Balance*

| Stratégies adéquates ou partiellement adéquates | Occ. a) | Occ. b) |
|---|---|---|
| ***Algébrisation du problème :*** | | |
| - en fixant plusieurs variables (substitutions) | 4 | 5 |
| - en fixant plusieurs variables avec ajout d'explications en mots | 1 | 1 |
| - en fixant une seule variable (la masse d'un verre comme) | 1 | 1 |
| - en fixant une seule variable (la masse d'un verre comme) sans conclusion | 0 | 1 |
| - en fixant une seule variable (la masse d'un verre comme) avec réponse en dessins | 1 | 1 |
| - algébrisation sommaire du problème sans préciser les variables | 1 | 1 |
| ***Explications en mots :*** | | |
| - avec une amorce d'une algébrisation du problème | 3 | 2 |
| - à partir du 3e équilibre (sans autre registre) | 9 | 0 |
| - à partir du 2e équilibre (sans autre registre) | 0 | 6 |
| - à partir du 2e équilibre (sans autre registre), mais sans avoir complété les déductions | 0 | 3 |
| ***Travail sur le dessin :*** | | |
| - avec amorce d'une algébrisation du problème | 2 | 2 |
| - avec couleurs (sans réelle explication) | 1 | 1 |
| - avec couleurs et amorce d'une algébrisation du problème | 1 | 1 |
| - avec couleurs avec une explication en mots | 2 | 2 |
| - avec éléments graphiques (ratures, cercle, etc,) et avec une explication en mots | 7 | 6 |
| - avec éléments graphiques (ratures, cercle, etc,) sans conclusion | 3 | 3 |
| - avec éléments graphiques (ratures, cercle, etc,) avec une conclusion erronée | 1 | 2 |
| - avec des explications en mots | 1 | 1 |
| - avec des explications en mots et des calculs | 1 | 1 |
| Fixe un poids fictif aux objets, mais sans arriver à une conclusion | 1 | 0 |
| **Total stratégies adéquates ou partielles :** | **40** | **40** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | | |
| Explications en mots d'une procédure ou réponse qui semble s'inspirer de la vie réelle | 2 | 1 |
| Mention par l'élève des essais-erreurs | 0 | 1 |
| Réponse seulement (classée inadéquate puisque appuyée sous aucune démarche*) | 12 | 12 |
| Réponse seulement sous forme d'une table de valeurs (idem *) | 1 | 0 |
| Aucune réponse | 1 | 2 |
| Aucune réponse (semble toutefois avoir amorcé une démarche avec un poids fictif aux objets) | 1 | 1 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **17** | **17** |
| **Total des stratégies :** | **57** | **57** |

*Tableau 32 - Compilation des stratégies pour la sous-question c) de la situation de la Balance*

| **Stratégies adéquates ou partiellement adéquates** | **Occ. c)** |
|---|---|
| ***Ramener en bols :*** | |
| - avec appui algébrique et réponse en dessins | 2 |
| - avec erreur de calculs et réponse en dessins | 1 |
| - avec des explications en mots, des calculs et la réponse en dessins | 4 |
| - avec des explications sommaires en mots et une réponse en mots | 2 |
| - avec explications algébriques difficiles à suivre | 1 |
| - avec explications en mots avec réponse en dessins | 2 |
| - avec explications en mots incomplètes | 1 |
| - avec proportions et réponse en dessins | 1 |
| - en se créant une de table de valeurs et réponse en dessins | 1 |
| - en référant à un dénominateur commun (fractions équivalentes) et réponse en dessins | 3 |
| - en référant au PPCM avec des explications en mots et réponse en dessins | 1 |
| Ramener en verres avec un peu d'algèbre (peu d'explications) et réponse en dessins | 2 |
| Ramener en assiettes en se construisant un tableau et en donnant une réponse en dessins | 1 |
| ***Explications en mots :*** | |
| - vraie à partir de ses déductions erronées en a) et b) avec une réponse en dessins | 2 |
| - et amorce de l'algèbre d'une série d'équations équivalentes à partir du 2e équilibre avec une réponse en dessins | 1 |
| Donne un poids fictif avec réponse fausse en dessins | 1 |
| Tableau résumé des équilibres déduits, peu d'explications en mots, avec réponse vraie en dessins | 1 |
| **Total stratégies adéquates ou partiellement adéquates:** | **27** |
| **Stratégies inadéquates ou fausses** | |
| ***Explications en mots :*** | |
| - avoir fait des essais et donne une mauvaise réponse | 2 |
| - de la production d'un faux équilibre en utilisant tous les objets et réponse en dessins | 1 |
| - de la production d'un faux équilibre en ne complétant pas ses déductions en bols, réponse en dessins | 1 |
| Ramener en bols à partir de déductions fausses en a) et b) avec réponse en dessins (il décode le « des » et mets 2 ass.=2 caf.) | 1 |
| Réponse fausse en dessins seulement | 5 |
| Réponse fausse en mots seulement | 1 |
| Réponse incomplète en dessins seulement | 2 |
| Réponse seulement (avec des équations algébriques non expliquées : classée inadéquate puisque appuyée sous aucune démarche*) | 1 |
| Réponse vraie en dessins seulement (idem *) | 7 |
| Réponse vraie en mots seulement (idem *) | 1 |
| Aucune réponse | 8 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **30** |
| **Total des stratégies :** | **57** |

Dans la question c), l'élève réalise ensuite son propre équilibre avec des cafetières sur un plateau et des assiettes sur l'autre plateau ayant tiré des conclusions des déductions trouvées en a) et b). La stratégie adéquate ou partielle la plus commune pour répondre à la sous-question c) (tableau 32) est de ramener l'équilibre recherché entre des cafetières et des assiettes sous une comparaison des bols.

Les registres de représentation sont au cœur des stratégies déployées par les élèves. De l'analyse a priori, cela était d'ailleurs l'une des intentions en exploitant cette situation qui évacue de sa présentation les nombres et les calculs, forçant ainsi l'élève à recourir à d'autres registres. N'ayant aucun nombre à sa disposition, l'élève doit raisonner sur les relations entre les objets. Pour ce faire, il doit développer son propre système de communication pour rendre compte l'activité mathématique qu'il a menée.

L'algèbre a été utilisée par huit sujets pour la sous-question a) et dix sujets pour la sous-question b) et ce, à différents niveaux. Certains s'y engagent plus fortement par des systèmes d'équations à plusieurs variables alors que d'autres amorcent un discours algébrique, parfois sans même préciser la variable utilisée. L'algèbre est un peu plus utilisée dans la résolution de la question b) où plusieurs déductions sont réalisées comparativement à la question a) qui se résout mieux à partir du dessin du 3e équilibre.

Par ailleurs, près de la moitié (19/40) des élèves qui ont recours à une stratégie adéquate ou partiellement adéquate font un travail sur les dessins, tant pour résoudre la sous-question a) que la sous-question b). Bien que ce travail sur le dessin constitue le principal élément de la stratégie, il est, la plupart du temps, accompagné d'une explication en mots, d'une amorce d'un discours algébrique ou de calculs. Les élèves mettent en relations plusieurs registres pour expliquer leur raisonnement.

Pour la sous-question c), la majorité des élèves (20/28) font une stratégie adéquate ou partiellement adéquate, en comparant les masses des cafetières et des assiettes à celle des bols. Deux élèves font la comparaison avec la masse des verres, alors qu'un seul le fait en comparant aux assiettes. Le retour aux bols ne surprend pas dans la mesure où les deux premières déductions demandent déjà aux élèves de comparer les masses d'un verre et d'une assiette avec celle des bols. Ils réinvestissent donc une partie des déductions précédentes.

### 13.5 Les stratégies mathématiques pour la situation du *Déménagement*

Le *Déménagement* est la deuxième situation qui convie les élèves à une prise de position sur la réalisation d'un élève-fictif. Les élèves doivent décoder et commenter la production d'un seul élève en y « *repérant les erreurs, les oublis, les précisions qu'il aurait dû faire, les calculs manquants*, etc. ». Dans l'*Enseignant*, la prise de position se fait sur des productions de deux élèves-fictifs. Le *Déménagement* est donc un peu différent. Les élèves commentent[107] la production de l'élève-fictif et lui signifient leurs attentes pour arriver à obtenir un meilleur résultat.

[107] Les commentaires ouverts des élèves sur la production de l'élève-fictif ont fait l'objet d'un codage dont les résultats sont analysés dans le chapitre 4.

Les stratégies présentées maintenant sont celles réalisées par les sujets avant l'analyse de la production de l'élève-fictif (partie 1[108]). On pourrait penser qu'il s'agit en fait de son « corrigé » bien que, contrairement à l'*Enseignan*t, on ne parle pas ici explicitement de « corrigé » dans l'énoncé, mais plutôt de réaliser une production pour « soi-même ». La situation du *Déménagement* était réalisée individuellement pour une période de 10 minutes pour ensuite être poursuivie en dyades.

Le tableau 33 rassemble les stratégies adéquates et partiellement adéquates repérées dans la situation du *Déménagement* alors que le tableau 34 présente les stratégies inadéquates[109].

La quasi-totalité des élèves utilisent une méthode algébrique pour résoudre la situation (sauf cinq élèves qui n'ont rien écrit et un qui semble faire un essai numérique).

*Tableau 33 - Compilation des stratégies adéquates ou partiellement adéquates pour la situation du Déménagement*

| **Méthode algébrique adéquate (sans erreurs, ni imprécisions)** | **Occ. ind.** | **Occ. équ.** |
|---|---|---|
| Contraintes sont bien traduites en équation (boîte sur le toit, quantité totale de boîtes, etc.), variables bien identifiées, vérification arithmétique | 2 | 2 |
| **Totaux:** | **2** | **2** |
| **Méthode algébrique partiellement adéquate (quelques imprécisions ou erreurs)** | | |
| Contraintes sont bien traduites en équation (boîte sur le toit, quantité totale de boîtes, etc.), variables bien identifiées : | | |
| - sans vérification arithmétique et avec une conclusion; | 1 | |
| - sans vérification arithmétique et sans une conclusion (on reste avec « x = 11 », sans retour à l'énoncé); | 1 | 1 |
| - variables imprécises (sans indication « nb de … »), vérification arithmétique; | | 1 |
| - variables imprécises, vérification et mauvaise conclusion en fonction de la réponse trouvée; | | 1 |
| - variables imprécises, pas de vérification et mauvaise conclusion en fonction de la réponse trouvée; | | 1 |
| - mais erreur dans la résolution d'équation (distributivité du 8 sur (x/3+1) ou du 3 sur la constante) et sans conclusion; | 2 | |
| - présence d'une amorce de validation qui dépasse la vérification arith, (les élèves mentionnent explicitement qu'il y a une erreur), mais erreurs dans la résolution d'équation (distributivité du 8 sur le num. et dén. et non-respect de la priorité des opérations) | | 1 |
| **Totaux:** | **4** | **5** |

[108] Question posée : *Dans un premier temps, résoudre le problème pour toi-même dans l'espace prévu à cet effet.*

[109] Nous sommes conscient que les prochains tableaux contiennent peut-être plus d'informations que nécessaires pour faire la démonstration de l'activité mathématique. Ces informations seront toutefois utiles lors de l'analyse de l'argumentation déployée et de même que lors des retours de l'enseignante. Nous nous excusons d'avance pour la densité de ces informations et invitons le lecteur à se laisser porter par l'analyse faite au chapitre 4.

*Tableau 34 - Compilation des stratégies inadéquates pour la situation du Déménagement*

| Stratégies inadéquates (plusieurs erreurs ou imprécisions) ou fausses | Occ. ind. | Occ. équ. |
|---|---|---|
| ***Amorce de l'algèbre :*** | | |
| - très partiellement en identifiant incorrectement les variables et en posant l'équation que Renaud a trouvée sans aller plus loin | 0 | 1 |
| - en identifiant correctement les variables, mais en ne posant pas la bonne équation | 1 | 0 |
| - en identifiant seulement avec imprécision les variables | 0 | 1 |
| - en identifiant seulement incorrectement les variables (traduit « 3 fois moins » par « -3x ») | 6 | 0 |
| - en identifiant incorrectement les variables et en posant une équation incorrecte (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrecte et Oubli boîte sur le toit de la voiture) | 1 | 0 |
| ***Méthode algébrique incomplète :*** | | |
| - avec une seule variable fixée, mauvaise équation (Oubli des voyagements) | 1 | 1 |
| - mauvaise équation (ne fixe pas d'égalité au départ), variables imprécises, erreur de calcul (distribue le 8 sur le numérateur et dénominateur), sans conclusion | 1 | 1 |
| - avec variables imprécises, équation correcte, mais avec erreur dans la résolution (distributivité du 8), sans conclusion, ni réponse | 2 | 0 |
| Méthode algébrique complète dont les variables sont incorrectes, les élèves partent avec l'équation de Renaud, la résolve correctement, mais n'en tire pas la bonne conclusion (plus de boîtes dans l'auto que le camion), présence d'une vérification | 0 | 1 |
| ***Mauvaise équation :*** | | |
| - qui résulte d'une mauvaise identification des variables : la considération des autres contraintes est correcte dans l'équation et présence d'une vérification qui semble soulever un doute chez l'élève (on dépasse la validation arithmétique) | 0 | 1 |
| - qui résulte d'une mauvaise identification des variables (3x + 1 pour la quantité de boîtes de Marie): la considération des autres contraintes est correcte dans l'équation et présence d'une amorce de validation (un doute chez l'élève (on dépasse la validation arithmétique)) | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements), variables imprécises, erreur de calcul (distributivité du 8), mais présence d'une vérification | 0 | 1 |
| - (Oubli des voyagements), variables imprécises, erreur de calcul (distributivité du 8) et sans vérification | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements), variables imprécises, mais présence d'une amorce de validation (élève indique « logiquement, je n'ai pas la bonne réponse, c'est un peu trop » et l'équipe : « c'est mauvais, mais nous avons essayé ») | 2 | 1 |
| - (Quantité totale de boîtes incorrecte), variables imprécises | 1 | 0 |
| - (Oubli boîte sur le toit de la voiture), variables imprécises | 0 | 2 |
| - (Oubli des voyagements), variables imprécises et sans conclusion | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrecte), variables correctes, erreur de calculs (effectue une division avant de réduire son équation) et conclu qu'il trouve le nombre de boîtes déménagées pour un aller-retour. | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrecte), variables imprécises et sans conclusion | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrecte), variables incorrectes, erreur de calcul (distributivité du 8), mais présence d'une vérification | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrecte et Oubli boîte sur le toit de la voiture), variables imprécises | 1 | 0 |
| - Mauvaise équation (Oubli des voyagements), variables incorrectes et traduit « 3 fois moins » par « -3x » | 2 | 0 |
| - (Oubli boîte sur le toit de la voiture), variables incorrectes et traduit « 3 fois moins » par « -3x » | 2 | 0 |
| - (Oubli des voyagements), variables incorrectes et traduit « 3 fois moins » par « -3x », mais présence d'une vérification | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrecte), traduit « 3 fois moins » par « -3x », variables incorrectes, sans conclusion, mais présence d'une vérification | 2 | 1 |
| - (Oubli des voyagements et Oubli boîte sur le toit de la voiture), traduit « 3 fois moins » par « -3x », variables incorrectes, sans conclusion, mais présence d'une vérification | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Quantité totale de boîtes incorrectes), traduit « 3 fois moins » par « -3x », une seule variable incorrecte définie, sans conclusion et fait une erreur dans sa résolution d'équation (divise avant d'avoir réduit ses termes en « x »). | 1 | 0 |
| - (Oubli des voyagements et Oubli boîte sur le toit de la voiture et Quantité totale de boîtes incorrecte), traduit « 3 fois moins » par « -3x », variables incorrectes, sans conclusion et avec une réponse négative qui n'est pas remise en question | 1 | 0 |
| L'élève fait un essai numérique seulement | 1 | 0 |
| Aucune résolution algébrique, mais présence de commentaires sur la résolution de Renaud | 0 | 2 |
| Aucune réponse | 4 | 3 |
| **Totaux:** | **37** | **16** |
| **Totaux des stratégies issues des tableaux 41 et 42 :** | **43** | **23** |

À la lecture des tableaux, deux constats semblent évidents. D'une part, étant donné le nombre restreints d'élèves qui font une méthode algébrique adéquate (sans erreurs, ni imprécisions) dans cette situation (2 sujets individuels (sur 43) et 2 équipes (sur 23)), il semble que la situation soit difficile pour les élèves. D'autre part, l'éventail des erreurs ou imprécisions répertoriées est assez large. Dans le tableau 34, les raisons qui justifient le classement des stratégies comme étant inadéquates (plusieurs erreurs ou imprécisions) sont écrites entre parenthèses. Une hiérarchisation dans les stratégies inadéquates allant de « *l'élève amorce une stratégie* » à « *l'élève ne fait rien* » (aucune réponse) est tentée.

Il importe d'abord de distinguer les stratégies qui débutent par l'expression « amorce » à celle qui commencent par « méthode algébrique incomplète ». Les stratégies d'amorce se limitent au plus à une présentation par l'élève de variables et d'une équation. Les élèves ne présentent toutefois pas explicitement l'équation posée (s'il y en avait une). Les éléments du raisonnement sont donc très sommaires. Les stratégies dites de « méthodes algébriques incomplètes », quant à elles, présentent plus de traces de raisonnement et de résolution d'une équation. Les élèves explicitent davantage leur raisonnement bien que celui-ci contient plusieurs erreurs ou imprécisions.

Ainsi, on constate que la présence d'imprécisions, d'oublis de variables ou de réponses erronées, ne signifie pas pour autant que les élèves ne sont pas engagés dans une activité mathématique pertinente.

Terminons la présentation des stratégies effectives des élèves en analysant l'activité mathématique dans la dernière situation, soit celle des *Équations*.

### 13.6 Les stratégies mathématiques pour la situation des *Équations*

La situation des *Équations* comporte trois sous-questions. Rappelons que les élèves prennent position sur deux résolutions algébriques, soit celles de Mylène et Pascal, pour trois résolutions d'équations. Les productions de ces deux élèves-fictifs sont représentées par des opérations algébriques sur des équations. Les tableaux 35, 36 et 37 présentent les diverses stratégies.

*Tableau 35 – Compilation des stratégies pour l'équation 1 de la situation des Équations*

| Stratégies adéquates ou partiellement adéquates | Occurrence |
|---|---|
| ***L'élève ramène les variables à droite et toutes les traces de sa résolution sont présentes:*** | |
| • il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 22 |
| • il arrive à la bonne réponse qu'il présente en fraction réduite (11/3). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre fractionnaire (3 2/3). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • il arrive à la bonne réponse qu'il présente en fraction (22/6) et en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • mais sont condensées en une seule ligne. Il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il ajoute une vérification de sa réponse accompagnée d'une explication en mots. Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • mais sont condensées en une seule ligne. Il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 2 |
| ***L'élève ramène les variables à gauche. Toutes les traces de sa résolution sont présentes :*** | |
| • il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 3 |
| • il laisse sa réponse sous la forme -22/-6). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. Il vérifie aussi sa réponse dans l'équation. | 1 |
| • mais sont condensées en une seule ligne. Il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • mais il croit toutefois que 22/6 est égale à 6/22). Il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| ***L'élève ramène les variables à droite :*** | |
| • Certaines traces de sa résolution sont implicites (indique « -3 » au lieu de « -3x »). Il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 2 |
| • Toutes les traces de sa résolution sont présentes (mais présente deux réponses 3,66 et 6/22). Il prend position pour aucun des deux élèves (ce qu'il nomme explicitement) et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • Toutes les traces de sa résolution sont présentes (mais il fait une erreur de calcul : -17 – 5 = -12). Il prend position pour aucun des deux élèves (ce qu'il nomme explicitement) et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • Toutes les traces de sa résolution sont présentes (mais il fait une erreur de calcul : -17 – 5 = -12). Il n'y a aucune prise de position et aucun argument. | 1 |
| L'élève travaille sur la production de Pascal en ramenant les variables à gauche. Il arrive à la bonne réponse qu'il présente en nombre décimal (3,66). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève prend seulement position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 11 |
| L'élève prend seulement position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 3 |
| L'élève n'indique que des flèches sur les productions des élèves comme traces de résolution. Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève ne développe pas sa résolution : il essaie la réponse de Mylène dans l'équation et prend position pour elle. Il ne fait aucun travail sur la résolution de Pascal. | 1 |
| **Total stratégies adéquates ou partiellement adéquates:** | **55** |
| **Stratégies inadéquates** | |
| L'élève ne donne qu'une réponse non commentée | 1 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **2** |
| **Total des stratégies :** | **57** |

*Tableau 36 - Compilation des stratégies pour l'équation 2 de la situation des Équations*

| **Stratégies adéquates ou partiellement adéquates** | **Occurrence** |
|---|---|
| ***L'élève ramène les variables à gauche. Toutes les traces de sa résolution sont présentes (il n'oublie pas la distributivité). Il arrive à la bonne réponse.*** | |
| • Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 19 |
| • Aucune prise de position et aucun commentaire. | 1 |
| • L'élève ne prend position explicitement pour aucun des deux et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 5 |
| • Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. Il fait aussi une vérification. | 2 |
| ***L'élève ramène les variables à gauche. Toutes les traces de sa résolution sont présentes (il n'oublie pas la distributivité). Il fait toutefois une erreur.*** | |
| • Divise le coefficient du « x » par -30 au lieu de -15. Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 2 |
| • Divise -30 par -15 et indique -2. Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • Divise -30 par -15 et indique -2. Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| • Divise -30 par 15 et indique -2. Il prend position pour aucun des deux élèves et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève divise par 15 les termes de son équation dès le départ. Toutes les traces de sa résolution sont présentes (il n'oublie pas la distributivité). Il arrive à la bonne réponse. Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 2 |
| L'élève part des solutions de Mylène et Pascal et vérifie leurs réponses dans leurs équations. Il ne fait pas de résolution algébrique personnelle. Il prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. Il montre un seul calcul où le « 150 » est divisé par 15 du côté de Pascal. | 2 |
| L'élève fait un travail sur le dessin de la production de Mylène (fait la distributivité et encercle le « -30 »). Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève prend position pour aucun des deux élèves et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 9 |
| L'élève prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 6 |
| **Total stratégies adéquates ou partiellement adéquates:** | **55** |
| **Stratégies inadéquates** | |
| L'élève ramène les variables à gauche. Toutes les traces de sa résolution sont présentes (il n'oublie pas la distributivité). Il faut toutefois une erreur et indique 15 x 12 = 160 et ajoute ensuite le 160 au lieu de le retirer de part et d'autre de l'équation. Il prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève ne donne qu'une réponse non commentée | 1 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **2** |
| **Total des stratégies :** | **57** |

*Tableau 37 – Compilation des stratégies pour l'équation 3 de la situation des Équations*

| Stratégies adéquates ou partiellement adéquates | Occurrence |
|---|---|
| ***L'élève fait une résolution algébrique en multipliant le 5/7 par 3. Les traces de résolution sont complètes. Il arrive à la bonne réponse en prenant position pour :*** | |
| • Mylène et en laissant des arguments à cet effet. Il fait aussi une vérification de sa réponse. | 2 |
| • pour Mylène et en laissant des arguments à cet effet. | 11 |
| • Pascal et en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| ***L'élève fait une résolution algébrique en multipliant le 5/7 par 3. Les traces de résolution sont imprécises. Il arrive à la bonne réponse en prenant position pour :*** | |
| • Mylène et en laissant des arguments à cet effet. Le dénominateur 21 disparaît toutefois sans explication. Il fait aussi une vérification de sa réponse. | 1 |
| • Mylène et en laissant des arguments à cet effet. Le dénominateur 21 disparaît toutefois sans explication. Il ne fait pas de vérification. | 8 |
| • Mylène et en laissant des arguments à cet effet. Il ne montre pas la multiplication par 3 (elle est implicite). Il ne fait pas de vérification. | 3 |
| • Pascal et en laissant des arguments à cet effet. Il ne montre pas la multiplication par 3 (elle est implicite). Il ne fait pas de vérification. | 1 |
| L'élève fait une résolution algébrique en multipliant le 5/7 par 3. Les traces de résolution sont complètes. Il n'arrive toutefois pas à la bonne réponse (x = -6) en prenant position pour Mylène et en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| ***L'élève multiplie le 5/7 par 21 et l'autre fraction par 7 pour mettre au dénominateur 14. Ses traces de résolution sont complètes. Il arrive à la bonne réponse :*** | |
| • il prend position pour Mylène en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| • il ne prend pas position et ne laisse pas d'arguments. | 1 |
| L'élève substitue les réponses de Mylène et Pascal dans les équations et compare la fraction 5/7 à 1 (moins que 1). Il fait aussi le produit croisé de Pascal. Il arrive à la bonne réponse en prenant position pour Mylène et en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| ***L'élève fait le produit croisé en n'oubliant pas la distributivité. Il arrive à la bonne réponse et prend position pour Mylène en laissant des arguments à cet effet.*** | |
| • Ses traces sont complètes, mais non explicitées. | 1 |
| • Ses traces sont toutefois incomplètes et non explicitées. | 1 |
| L'élève ne fait qu'une correction sur la production de Pascal en distribuant le 7. Il n'y a aucun travail sur la production de Mylène. Il prend position pour Pascal en laissant des arguments à cet effet. | 2 |
| L'élève substitue la réponse de Mylène (6) dans son équation. Il n'y a aucun travail sur la production de Pascal. Il prend position pour Mylène en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève fait un travail sur les deux productions (inscrit la distributivité; complète les équations de Mylène). Il ne fait toutefois pas sa propre résolution. Il prend position pour Pascal en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève développe les deux stratégies (le 21 disparaît toutefois dans son développement de la stratégie de Mylène). Il arrive à la bonne réponse. Il prend position pour Mylène en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève amorce une résolution algébrique avec démarches incomplètes: il fait le « x 3 »; n'inscrit pas le numérateur avec le « x » »; retire les 21. Il arrive à la bonne réponse. Il prend position pour Mylène en laissant des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève prend position pour aucun des deux élèves et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève prend position pour Mylène et laisse des arguments à cet effet. | 8 |
| L'élève prend position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 5 |
| **Total stratégies adéquates ou partiellement adéquates:** | **53** |
| **Stratégies inadéquates** | |
| L'élève amorce une résolution algébrique en inscrivant « x 3 », montre les fractions équivalentes et arrête sa résolution. Il ne se rend pas à une réponse, mais prend toutefois position pour Pascal et laisse des arguments à cet effet. | 1 |
| L'élève semble bloqué et ne fait aucune stratégie. Il inscrit toutefois ne prendre position pour « Aucun des deux » et laisse des arguments à cet effet | 2 |
| L'élève inscrit qu'il ne sait pas comment faire. | 1 |
| **Total stratégies inadéquates :** | **4** |
| **Total des stratégies :** | **57** |

Comme le montrent les trois tableaux précédents, les élèves semblent avoir déployé assez facilement une activité mathématique dans les trois sous-questions. La plupart des élèves ont produit une solution pour eux-mêmes (ici une résolution algébrique développée) même si cela n'est pas explicitement demandé dans la question (on demandait de commenter et de prendre position).

Ainsi, pour l'équation 1, 39 sujets laissent des traces d'une stratégie personnelle avant leur prise de position et 14 sujets ne laissent que des arguments pour prendre position. Pour l'équation 2, 36 sujets y vont d'une stratégie personnelle en plus de laisser des arguments pour leur prise de position et 19 sujets ne laissent que des arguments pour prendre position. Pour l'équation 3, ce sont 34 sujets qui réalisent une stratégie personnelle en plus d'argumenter une prise de position et 14 sujets ne présentent que des arguments pour prendre position.

Toutes les stratégies répertoriées dans cette annexe permettent de conclure qu'une activité mathématique pertinente a été déployée lors de la réalisation de la séquence des situations que nous avons conçue.

## Annexe 14 - Comparaison des niveaux d'argumentation en jeu dans les six situations

Voici les graphiques comparatifs du critère de l'argumentation qui a été codé pour toutes les situations et pour toutes les sous-questions.

*Figure 63 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation des Allumettes*

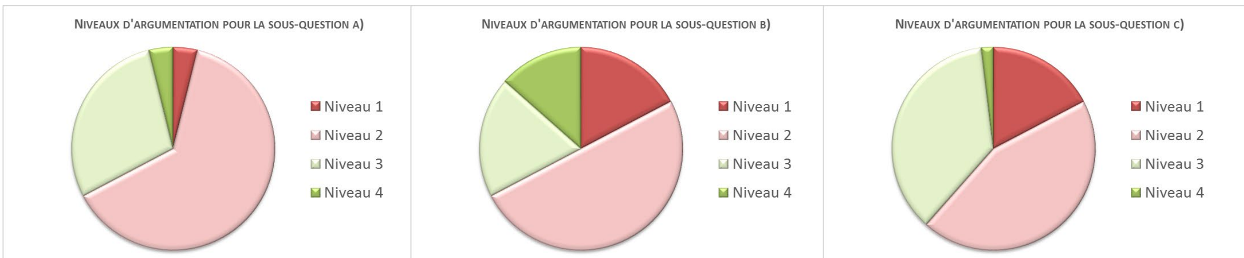



*Figure 64 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées individuellement*

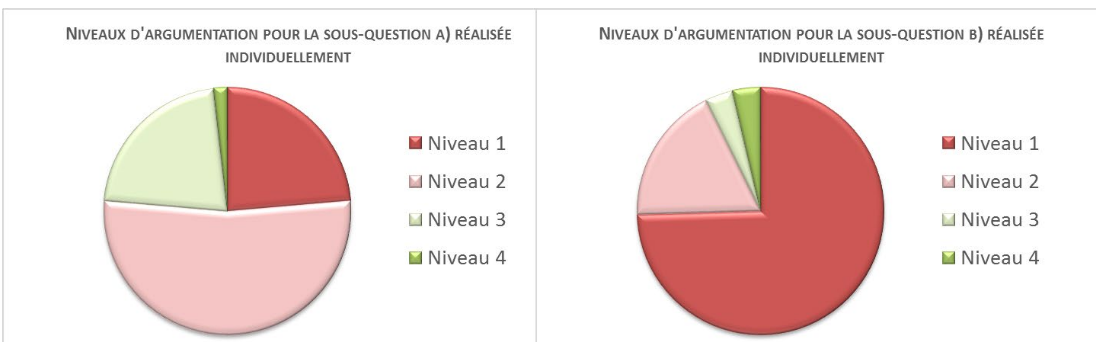



*Figure 65 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées en équipes*

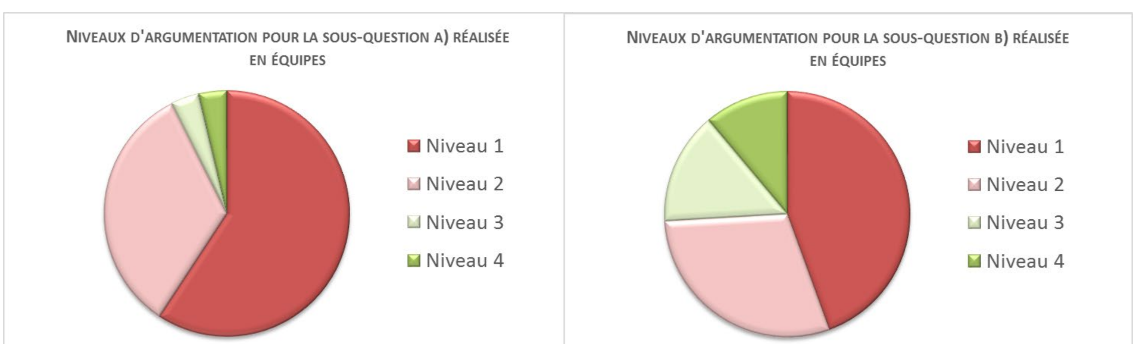


*Figure 66 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation de l'Enseignant lorsque l'élève fait son corrigé*

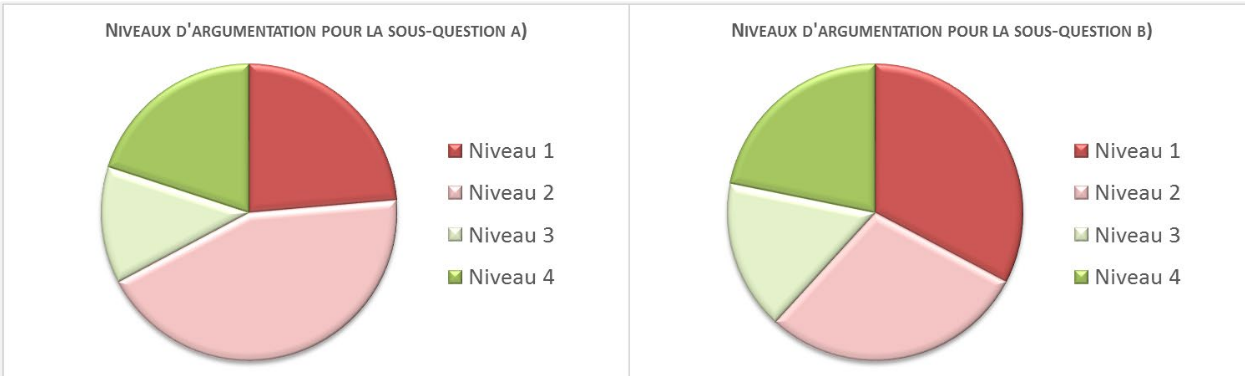



*Figure 67 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation de la Balance*

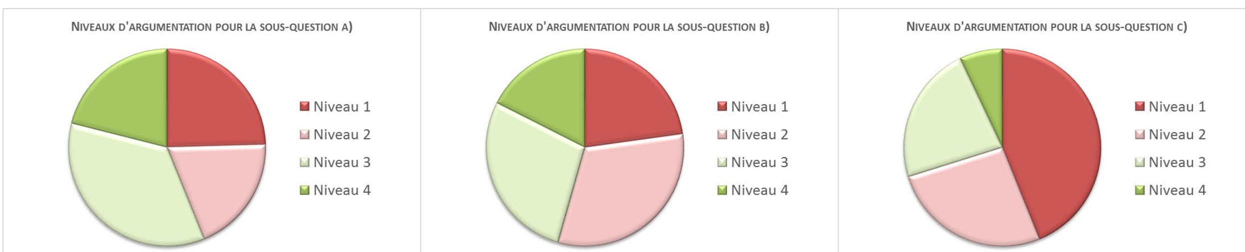



*Figure 68 - Répartition des niveaux d'argumentation pour les parties individuelle et en équipes de la situation du Déménagement*

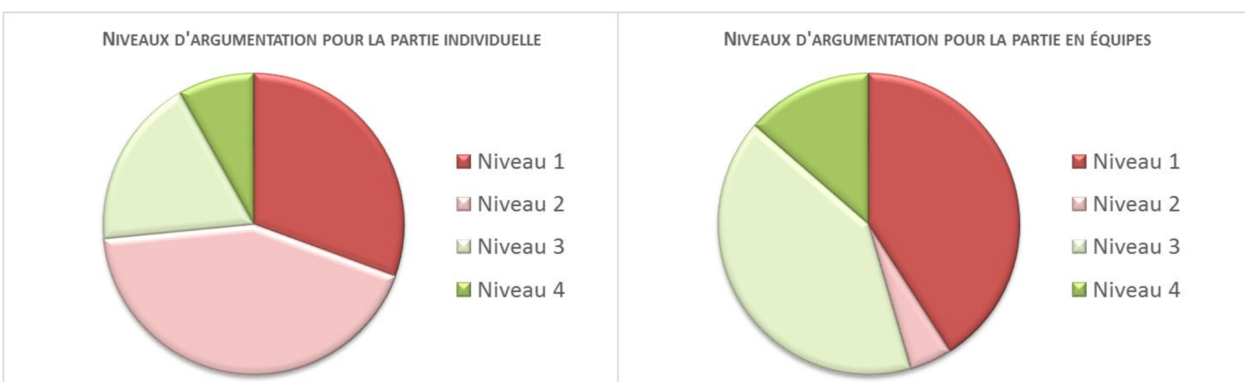
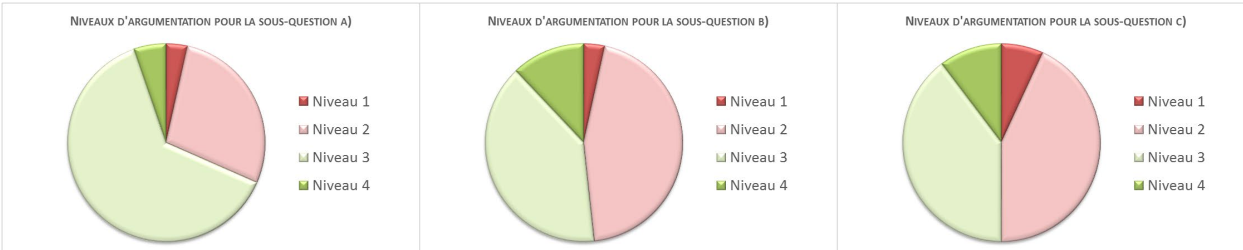


*Figure 69 - Répartition des niveaux d'argumentation pour chacune des sous-questions de la situation des Équations*



## Annexe 15 - Comparaison des niveaux d’organisation en jeu dans les six situations

Voici les graphiques comparatifs du critère de l’organisation qui a été codé pour toutes les situations et pour toutes les sous-questions.

*Figure 70 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation des Allumettes*

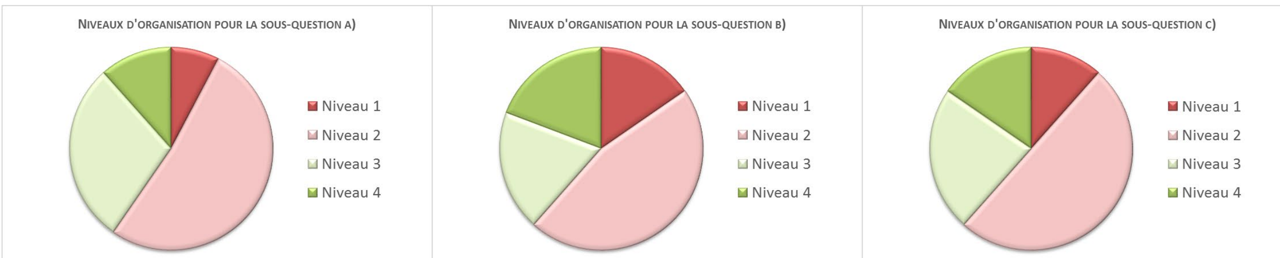



*Figure 71 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées individuellement*

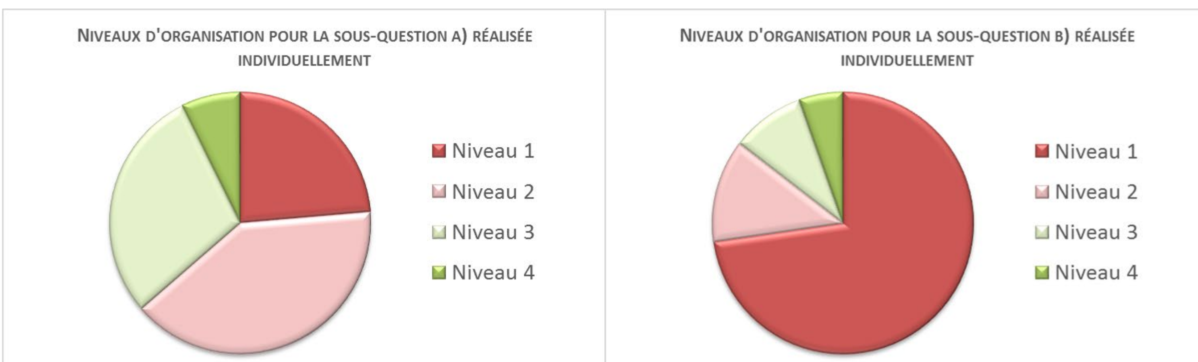



*Figure 72 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation du Magicien réalisées en équipes*

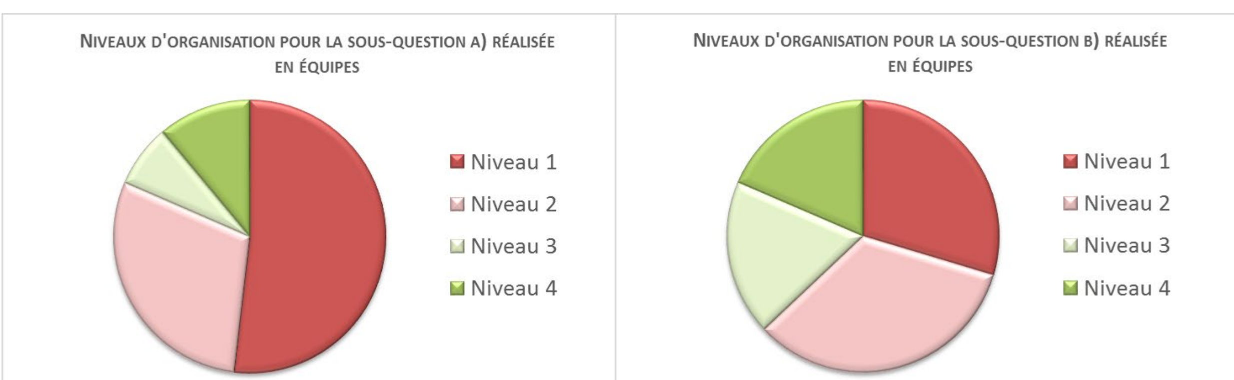


*Figure 73 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation de l'Enseignant lorsque l'élève fait son corrigé*

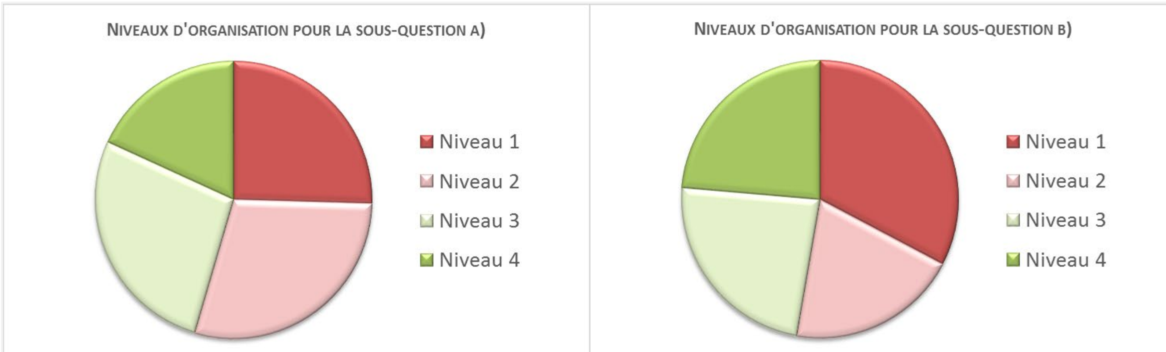



*Figure 74 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation de la Balance*

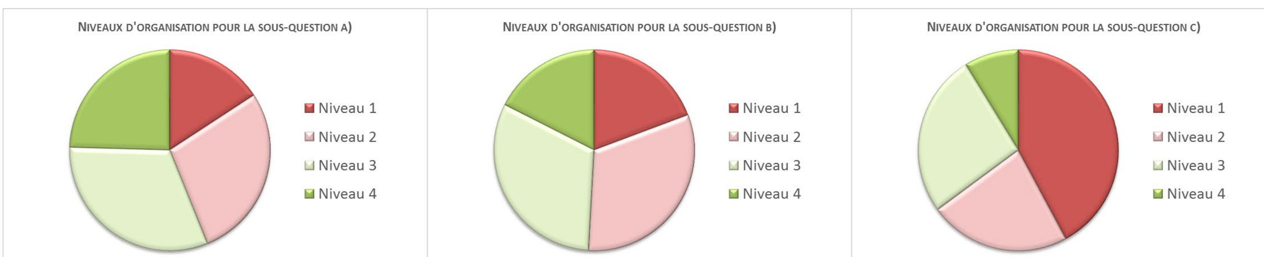



*Figure 75 - Répartition des niveaux d'organisation pour les parties individuelle et en équipes de la situation du Déménagement*

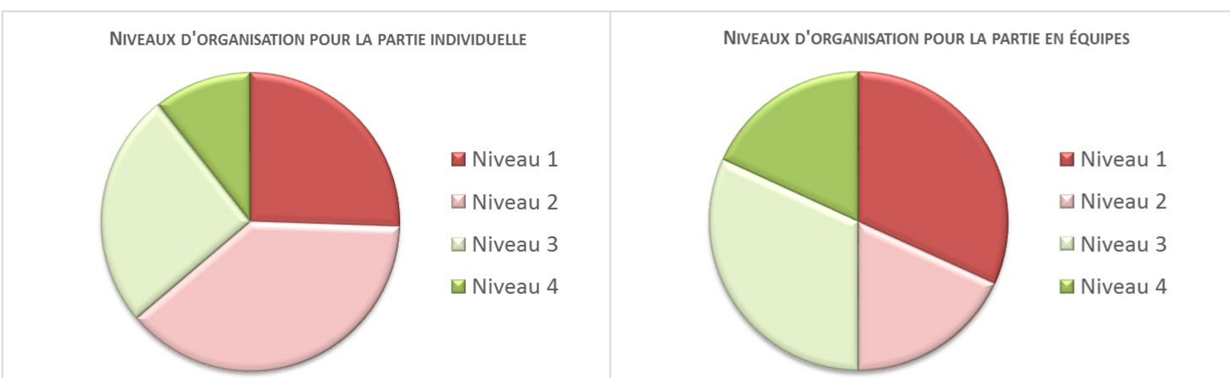
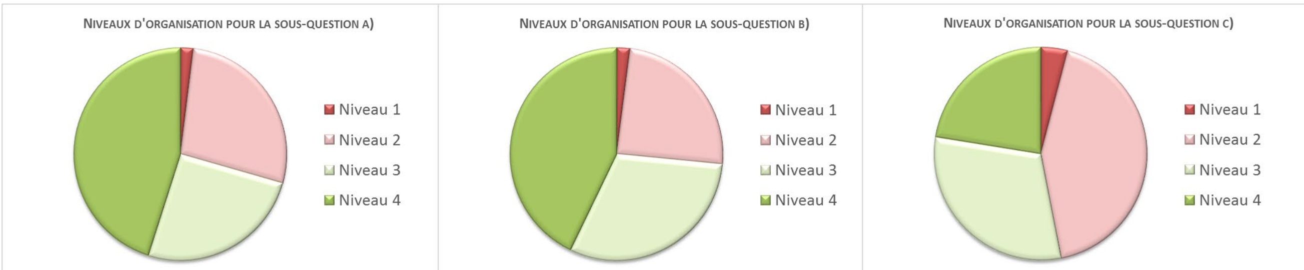


*Figure 76 - Répartition des niveaux d'organisation pour chacune des sous-questions de la situation des Équations*



## Annexe 16 - Extrait d'un verbatim des interactions entre deux sujets dans la réalisation de la situation du *Magicien*

L'une des élèves (E1) demande ce que l'autre (E2) a fait en b). E2 répond qu'il faut faire un peu ce qui a été fait en a), mais qu'au lieu de donner 8, ça va donner 20.

E1 : « Ok, il faut que ça marche pour n'importe quel nombre, il faut que ça finisse par 20, en cinq étapes » dit-elle. E2 : « Oui »

E1 : « Mais si on check là, c'est tous des nombres pairs… »…. (Elles hésitent).

E1 : « Si tu multiplies et tu divises, ça doit être tous des multiples de 20…. Et si tu additionnes et tu soustrais, ça doit être aussi un nombre pair…ça doit pas être si sorcier que cela». (On sent très bien que les deux élèves sont en réflexion intense, mais qu'elles ont de la difficulté à exprimer leurs idées). « Ça s'annule…. Si tu multiplies par 4 et que tu divises par 4, ça s'annule…des multiplier, diviser, ça s'annule…dans le fond, ça part d'un nombre….ça s'annule…si on dit qu'on fait la même chose qu'eux : tu multiplie, tu additionnes, tu divises, tu additionnes, tu divises, tu soustrais…Ah non, il faut que ça soit 5 étapes…

E2 : « On a juste à faire…diviser….au pire….diviser…. »

E1 (elle interrompt) : « multiplier, additionner, diviser, additionner, soustrait le nombre… »

E2 : « Oui, pis le diviser va juste être deux fois plus gros… »

E1 : « On a juste à mettre les deux « diviser » ensemble »

E2 : « C'est ça »

E1 : « C'est moi qui écrit ?... Faque on va faire le b), parce que le a) on ne le comprend pas. Faque multiplier par quoi? Faudrait le tester avant voir si ça marche… »

E2 : « On fait essais-erreur au pire »

E1 : « 29…faut que tu multiplies par quelque chose et que tu le divises après….fait….n'importe quoi….6…fois 6….Écris-le….Additionner…plus 8….choisis les nombres genre

E2 : Additionner 14….diviser… ?...par… 8 ? »

E1 : « Non, parce que multiplier et diviser faut que ça s'annule »

E2 : « Par 6 ça marche pas… »

E1 : « Mets 6…fais un autre additionner »

E2 : « Alors combien….? »

E1 : « 15 »

E2 : « Ça marche pas »

E1 : « On est comme….périodique hein ? »

E2 : « Moi je dis que si on veut que ça donne un nombre pair, il faudrait additionner et soustraire des nombres pairs »

(L'enseignante demande à toute la classe: « Puis, est-ce qu'il y a des bons magiciens ?)

E1 et E2 : « pas pantoute ! »

E1 : « Trouve un autre chiffre….un petit chiffre ». (Les filles font des essais avec différents nombres. En arrivant à des nombres périodiques, elles réalisent qu'elles font une erreur).

E1 : « Heille, ça serait tellement simple : diviser par lui-même, plus 20 »

E2 : « Mais il faut que ce soit en 5 étapes »

E1 : « Diviser par 5, diviser par 5, diviser par 5, diviser par 5, plus 20….Houhou !...J'y vais ! 20 diviser par 5….ça marche pas, ça donne 4. ». (À la calculatrice, elles font maintenant l'opération 100 diviser par 100 plus 20.

E1 : « 21 ! » (Rires) « 50, diviser par 50, fois 20….Houhou ! »

E2 : « Ah, on devrait faire diviser par la moitié…. diviser par la moitié du nombre… »

E1 : « Oui, mais si tu prends n'importe quel nombre ? Mettons, 50, diviser par 25, diviser par 25…ça marche pas… »

E2 : « Diviser par 2 d'abord »

E1 : « Ahhh, je sais, il faudrait faire le nombre, diviser par deux, plus le nombre que ça donne…. J'ai une idée, Maude, check, si je prends 10, diviser par sa demie, plus sa demie, fois 3, moins 1».

E2 : « Ok, si on essaie avec 14 maintenant…14, diviser par 7, 2, plus 7, 9, fois 3, moins….1…ça donne 26. Ça marchera pas, parce que 21 c'est un nombre premier. »

*Au bout de 13 minutes et demi, les filles se sont découragées et ne sont plus investies dans le problème.*

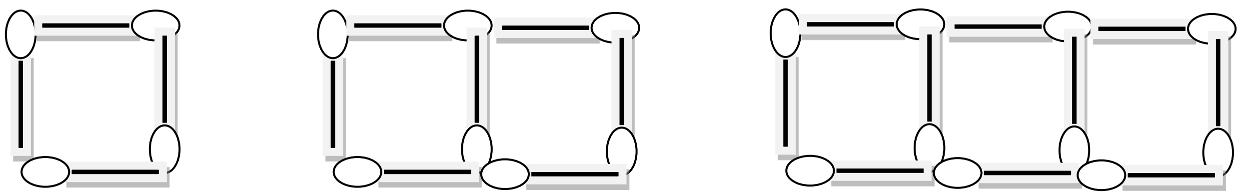
E1 : « Madame, est-ce que c'est impossible ? Ça fait 15 minutes et on a rien réussi encore. ». [Elles font encore quelques essais, mais on entend qu'elles sont moins concentrées].

[L'enseignante vient les relancer. Elles font une tentative ultime sous la forme : un nombre, divisé par sa moitié, fois 10….et ensuite, quand l'enseignante leur dit qu'il manque deux étapes, elles ajoutent, toutes fières, plus 10, moins 10. L'enseignante leur dit qu'elles sont en train de comprendre. Elles font un autre essai avec 45 (impair) et ensuite, elles formalisent leur réponse. Elles ont toutefois modifié leur fin de la façon suivante : moins 5, plus 15, moins 10. Ensuite, elles essaient avec d'autres nombres : 90. Elles sont très fières. L'une s'écrit : « c'est E2 qui a trouvé ! ». E2 s'exclame : « relaxe, on l'a trouvée à deux. ». Elles montrent leur énigme à une amie qui tente de la faire.]

# Annexe 17 - Les six situations conçues et expérimentées

## SITUATION # 1 - LES ALLUMETTES

On a formé les dessins suivants à partir d'allumettes. Par exemple, le premier dessin est formé à l'aide de 4 allumettes.



a) En expliquant bien ta réponse, combien d'allumettes contiendrait le $97^{e}$ dessin ?

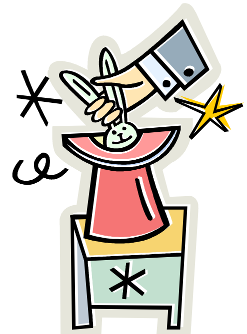
b) Quel rang occupe le dessin qui contient 46 allumettes ? Explique.

c) Comment fait-on pour connaître le nombre d'allumettes que contient un dessin quand on sait son rang ?

### MA SOLUTION

## SITUATION # 2 - LE MAGICIEN

Un magicien invite une personne à choisir un nombre quelconque sans le révéler. Il lui demande ensuite d'effectuer les opérations suivantes :



- Multiplier ce nombre par 4 ;
- Additionner 12 ;
- Diviser le dernier résultat par 2 ;
- Additionner 10 ;
- Diviser le dernier résultat par 2 ;
- Soustraire le nombre choisi au départ.

Le magicien révèle ensuite que le résultat obtenu à la suite de ces opérations est 8.

a) Explique mathématiquement pourquoi il ne s'agit pas de magie.

b) Invente un « truc de magie » en cinq étapes qui amènerait toutes tes « victimes » avec un résultat final de 20. Explique ensuite par écrit pourquoi ton truc fonctionne.

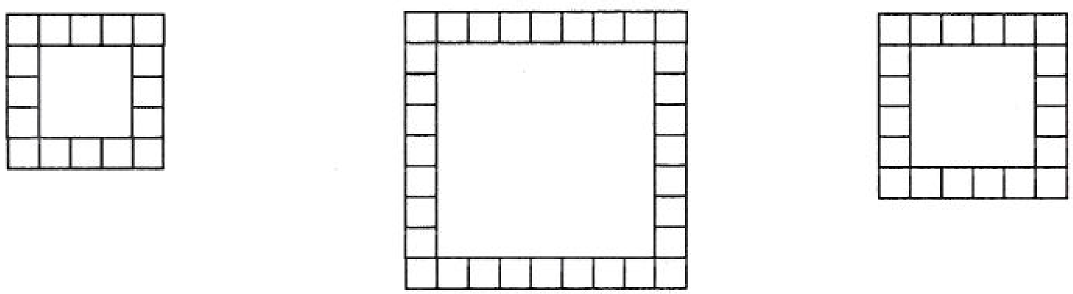
### MA SOLUTION

SITUATION # 3 - BONNE NOUVELLE ! ON T'OFFRE LA CHANCE DE JOUER A L'ENSEIGNANT !

**Amélie et Maxime, deux de tes élèves, viennent de te remettre leur solution au problème suivant.**

*Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (<u>la surface blanche sur les dessins</u>) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.*

*Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux <u>autour du miroir</u> de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.*



*a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?*

b) *Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?*

**Comme enseignant, tu dois :**

1- Répondre toi-même à la question, puis faire ton corrigé.

2- Ensuite, ton enseignante te remettra les copies de Maxime et Amélie. Corrige les productions d'Amélie et de Maxime en inscrivant des commentaires directement sur leurs copies.

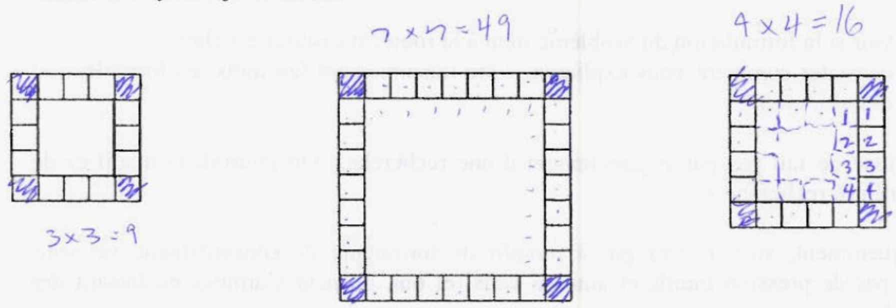
3- Comment pourrais-tu expliquer à la classe le fait que les deux élèves arrivent à la même quantité de carreaux à la question b) alors qu'ils n'ont pas trouvé la même règle ?

4- Entre les deux solutions qui te sont proposées, y en a-t-il une qui t'apparaît meilleure que l'autre ? Explique pourquoi.

## MAXIME

*Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (<u>la surface blanche sur les dessins</u>) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.*

*Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux <u>autour du miroir</u> de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.*




*a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?*

*b) Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert 88 carreaux ?*

• le nombre de carreaux ~~sur~~ un côté est pareil à la mesure
• le nombre de coins est toujours la même = 4

$3 \times 3 = 9 \quad (4 \overset{12}{\times} 3) + 4$ coins $= 16$

$4 \times 4 = 16 \quad (4 \overset{16}{\times} 4) + 4$ coins $= 20$

$7 \times 7 = 49 \quad (4 \overset{28}{\times} 7) + 4$ coins $= 32$

↑
côté

a) $(4 \times \text{côté}) + 4 =$ nombre de carreaux

b) $(4 \times \_\_\_) + 4 = 88$

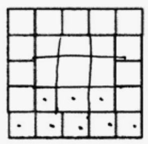
$+4 - 4 \quad 88 - 4$

$4 \times \_ = 84$

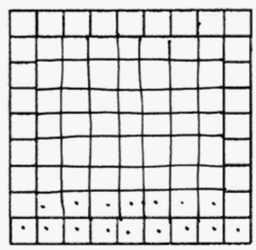
$= 84 \div 4 = 21$

*Un encadreur doit réaliser l'encadrement de miroirs carrés (<u>la surface blanche sur les dessins</u>) avec des carreaux de mosaïque. Il ne dispose que d'une seule grandeur de carreaux.*

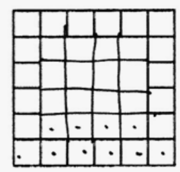
*Ses clients choisissent la taille du miroir qu'ils veulent. La seule condition posée par l'encadreur est que la dimension du miroir corresponde à un nombre entier de carreaux, comme dans les modèles illustrés ci-dessous. L'encadreur dispose ses carreaux <u>autour du miroir</u> de manière à ne pas cacher la surface réfléchissante.*



$5 \times 5 = 25$
$3 \times 3 = 9$
$25 - 9 = \underline{16}$



$9 \times 9 = 81$
$7 \times 7 = 49$
$81 - 49 = \underline{32}$



$6 \times 6 = 36$
$4 \times 4 = 16$
$36 - 16 = \underline{20}$

*a) Peux-tu indiquer une façon qui permette à l'encadreur de trouver rapidement le nombre de carreaux nécessaires pour réaliser l'encadrement dès qu'un client lui donne la mesure du côté du miroir en unités « carreaux » ?*

b) *Quelle est la mesure du côté d'un miroir dont l'encadrement requiert <u>88 carreaux ?</u>*

a) Pour trouver le nombre de carreaux pour l'encadrement, il faut trouver le nombre de carreaux total et enlever le nombre de carreaux sur le miroir.

Formule = (côté + 2 x côté + 2) − côté x côté

b) $\cancel{17} + 2 = 19 \times 19 = 361$
$361 - 289 = 72$

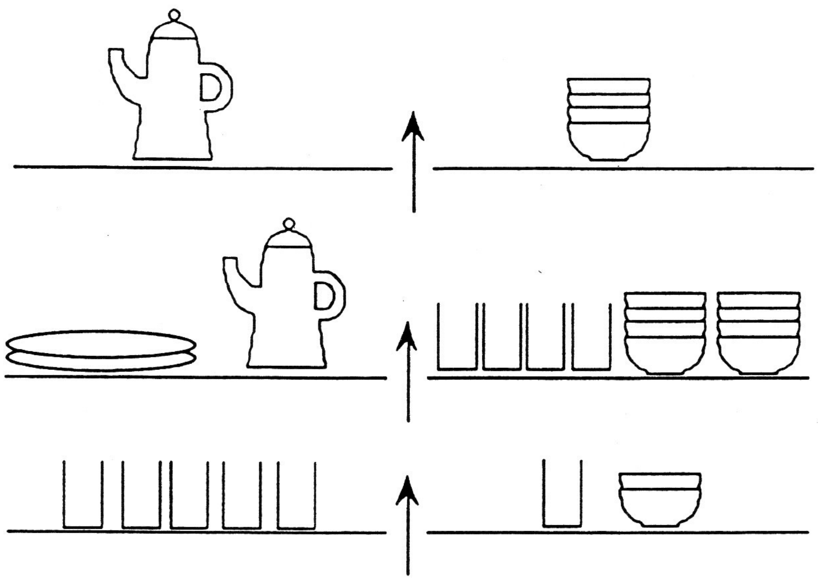
$\cancel{18} + 2 = 20 \times 20 = 400$
$400 - 324 = 76$

| | | |
|---|---|---|
| 17 | = 72 | |
| 18 | = 76 | +4 |
| 19 | 80 | +4 |
| 20 | 84 | |
| 21 | 88 | |

Rép : 21 carrés sur un côté

### SITUATION # 4 - LA BALANCE

Sur une balance, je mets une cafetière, des assiettes, des bols et des verres. J'obtiens trois équilibres représentés par les trois dessins suivants.



a) Peux-tu comparer la masse d'un verre et d'un bol ? Explique clairement ta réponse.

b) Peux-tu comparer la masse d'une assiette et d'un bol ? Explique clairement ta réponse.

c) Je voudrais faire un équilibre avec des cafetières sur un plateau et des assiettes sur l'autre plateau. Fais le dessin qui représenterait cette situation d'équilibre. Explique clairement ta réponse.

### MA SOLUTION

**SITUATION # 5 - UN DEMENAGEMENT PESANT**

Renaud a affronté, lors de son épreuve de fin d'année, le problème suivant :

**Un déménagement pesant**

Valérie et Éric déménagent. Lors du grand jour, leurs familles se chargeront de transporter les boîtes. La voiture de tante Marie peut contenir trois fois moins de boîtes que le camion de l'oncle Richard, mais Marie décide de déménager une boîte de plus en l'attachant sur le toit de sa voiture pour que ça aille plus vite.

En fin d'après-midi, il reste encore 25 boîtes dans l'appartement, malgré les 8 allers-retours de la voiture et les 7 allers-retours du camion.

Combien de boites peut contenir le camion de l'oncle Richard, si au total Valérie et Éric avaient 352 boîtes à déménager?

Dans un premier temps, résous le problème pour toi-même dans l'espace prévu à cet effet.

**MA SOLUTION AU PROBLÈME**

La solution de Renaud est présentée ici :

$x$ = Marie

$3x$ = Richard

$$8x + 8 + 21x = 327$$

$$29x = 319$$

$$x = 11$$

Réponse : Il y a 11 boîtes qui entrent dans le camion

L'enseignant de Renaud est plutôt déçu de sa solution…. Il y trouve plusieurs bons éléments, mais il considère que Renaud n'a pas assez développé son raisonnement. Il donne à Renaud la note de 4/10 pour sa solution.

Et toi ? Que penses-tu de la solution de Renaud ?

Analyse la solution de Renaud, c'est-à-dire repères-y les erreurs, les oublis, les imprécisions qu'il aurait dû faire, les calculs manquants, etc. <u>Explique bien à Renaud chacun des éléments qu'il aurait dû ajouter pour obtenir un 10/10</u>.

**MES COMMENTAIRES SUR LE PROBLEME DE RENAUD. POUR OBTENIR 10/10, RENAUD AURAIT DU FAIRE…**

UN DEMENAGEMENT PESANT

LA SOLUTION DE L'EQUIPE

## SITUATION # 6 - LA RESOLUTION D'EQUATIONS

Pour chacune des équations algébriques suivantes, tu devras commenter les productions des deux élèves et décider, à l'aide d'arguments, qui a le mieux réussi.

**Équation 1 :** $3x + 5 = 9x - 17$

| **Solution de Mylène** | **Solution de Pascal** |
| --- | --- |
| $3x + 5 = 9x - 17$<br>$-3x \qquad -3x$<br>$5 = 6x - 17$<br>$+17 \qquad +17$<br>$\frac{22}{6} = \frac{6x}{6}$<br>$3,6 = x$ | $3x + 5 = 9x - 17$<br>$5 - 6x = -17$<br>$22 - 6x = 0$<br>$x = \frac{6}{22}$ |

**MON COMMENTAIRE**

Je trouve que ________________________ a mieux réussi parce que ____________________________

______________________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

**Équation 2 :** $15 \cdot (12 - x) = 150$

| **Solution de Mylène** | **Solution de Pascal** |
| --- | --- |
| $15 \cdot (12 - x) = 150$<br>$180 - x = 150$<br>$-180 \quad -180$<br>$-x = 30$<br>$x = -30$ | $15 \cdot (12 - x) = 150$<br>Donc, $12 - x = 10$<br>$x = 2$ |

**MON COMMENTAIRE**

Je trouve que ________________________ a mieux réussi parce que ____________________________

______________________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________________

**Équation 3 :** $\frac{5}{7} = \frac{(9+x)}{21}$

**Solution de Mylène**

$$\frac{5}{7} \xrightarrow{\times 3} \frac{(9+x)}{21}$$

$$9+x = 15$$

$$x = 6$$

**Solution de Pascal**

$$\frac{5}{7} = \frac{(9+x)}{21}$$

$$5 \cdot 21 = 7 \cdot (9+x)$$

$$105 = 63 + x$$

$$x = 42$$

**MON COMMENTAIRE**

Je trouve que ________________________ a mieux réussi parce que ___________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

## Annexe 18 – Formulaires de consentement (Élèves, parents et enseignante)

### FORMULAIRE DE CONSENTEMENT POUR LES ÉLÈVES ET LEURS PARENTS

**Titre de la recherche** : Mise à l'essai d'une famille de situations de communication en algèbre destinée à des élèves de 2e secondaire

**Chercheur** : Philippe Labrosse, étudiant au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

**Directrice de recherche** : Sophie René de Cotret, professeure agrégée, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

### A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

#### 1. Objectifs de la recherche.

Ce projet vise à étudier deux éléments. Il s'intéresse :

- d'une part, aux problèmes écrits en mathématique réalisés en classe qui favorisent l'apprentissage des élèves en les amenant dans une activité mathématique de qualité tout en leur permettant d'échanger avec les autres élèves et leur enseignant et;

- d'autre part, au fait que l'enseignant, en proposant à ses élèves des situations où les élèves doivent échanger par écrit avec les autres élèves ou leur enseignant pour expliciter leur travail, obtient des éléments qui lui permettent d'ajuster son enseignement en fonction du degré de compréhension qu'il peut percevoir dans le travail des élèves.

Le chercheur s'intéresse donc aux réponses données par les élèves aux diverses situations proposées de même qu'aux interactions entre l'enseignant et ses élèves.

#### 2. Participation à la recherche

La participation de votre enfant à cette recherche consiste à résoudre 6 activités de communication en algèbre. La période de réalisation en classe de même que la période de retour avec l'enseignant sont filmées. Tous les élèves auront aussi, après chaque activité, à répondre à de courtes questions par écrit sur leur appréciation de l'activité.

Trois élèves par classe pourraient être demandés pour faire une courte entrevue (au plus 30 minutes) avec le chercheur ou la directrice de ce dernier après la réalisation des activités afin que ces derniers puissent mieux expliquer leur production au chercheur. Cette entrevue serait filmée (si l'élève a accepté : voir section « consentement ») et aurait lieu à l'école, à un moment convenu avec l'élève et l'enseignant, sans que l'élève ne soit pénalisé dans ses autres cours.

#### 3. Confidentialité

Les réponses aux situations que les élèves donneront demeureront confidentielles. Les productions écrites des élèves seront photocopiées. Les séances vidéos seront transcrites et les enregistrements effacés. Seul le chercheur et sa directrice visionneront les vidéos.

Chaque participant à la recherche se verra attribuer un numéro et seul le chercheur principal et/ou la personne mandatée à cet effet auront la liste des participants et des numéros qui leur auront été attribués. De plus, les renseignements seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé. Aucune information permettant d'identifier les élèves d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. Ces renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas d'identifier les élèves seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation.

**4. Avantages et inconvénients**

En participant à cette recherche, votre enfant ne court pas de risque ou d'inconvénient particulier et il pourra contribuer à l'avancement des connaissances et à l'amélioration des services offerts aux élèves et aux enseignants de mathématiques. La participation de votre enfant à la recherche pourra également l'aider à développer ses compétences en mathématiques, particulièrement en algèbre.

**5. Droit de retrait**

La participation de votre enfant est entièrement volontaire. Vous êtes libre de le retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier votre décision. Si vous décidez de retirer votre enfant de la recherche, vous pouvez communiquer avec le chercheur, au numéro de téléphone indiqué ci-dessous. Si vous retirez votre enfant de la recherche, les renseignements qui auront été recueillis (vidéo et photocopies de ses productions destinées au chercheur) au moment du retrait seront détruits.

Notez que la destruction des copies des productions de votre enfant n'entraîne aucun préjudice puisque les copies originales sont conservées par l'enseignant qui pourrait les utiliser dans le cadre normal du cours de mathématiques, les activités proposées cadrant tout à fait avec le programme de formation de l'école québécoise.

Un élève qui aura été soustrait à la recherche sera, en classe, placé hors du champ de la caméra, sans préjudice, et réalisera tout de même les activités proposées puisque ces dernières sont en lien avec le déroulement normal du cours.

**6. Compensation**

Les participants ne recevront aucune compensation financière pour leur participation à la recherche.

**7. Diffusion des résultats**

Une copie de la thèse ainsi que les articles scientifiques qui s'y rattachent seront transmis aux enseignants, pour la thèse, au cours de l'année scolaire 2014-2015, lorsque les analyses auront été effectuées et, pour les articles, tant et aussi longtemps que ces derniers seront produits par le chercheur en lien avec la présente expérimentation.

Les parents qui désirent également recevoir électroniquement la thèse et les articles scientifiques, peuvent inscrire leurs coordonnées dans la partie « consentement » ci-après. Ces coordonnées resteront strictement confidentielles et ne serviront qu'aux fins de transmission des résultats.

**B) CONSENTEMENT**

| | Oui | Non |
|---|---|---|
| *Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur la participation de mon enfant à la recherche et comprend le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.* | ☐ | ☐ |
| *Après réflexion et un délai raisonnable, je consens à ce que mon enfant participe à cette étude. Je sais que mon enfant peut se retirer en tout temps, sur simple avis verbal, sans aucun préjudice et sans avoir à justifier sa décision* | ☐ | ☐ |
| *Je consens à ce que, dans l'éventualité où mon enfant est demandé pour une courte entrevue de moins de 30 minutes après la réalisation d'une ou des activités de communication, mon enfant soit interviewé et filmé par le chercheur ou sa directrice.* | ☐ | ☐ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Signature d'un parent: | | Date : | |
| Nom : | | Prénom : | |
| Adresse électronique : | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Signature de l'élève: | | Date : | |
| Nom : | | Prénom : | |

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Signature du chercheur (ou de son représentant): | | Date : | |
| Nom : | *Labrosse* | Prénom : | *Philippe* |

Pour toute question relative à l'étude, ou pour retirer votre enfant de la recherche, vous pouvez communiquer avec Philippe Labrosse, doctorant et chercheur, au numéro de téléphone suivant : (514) 765-7666 poste 4142 ou à l'adresse courriel philippe.labrosse@csmb.qc.ca.

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

**Un exemplaire du formulaire d'information et de consentement signé doit être remis au participant.**

**FORMULAIRE DE CONSENTEMENT <u>POUR LES ENSEIGNANTS</u>**

**Titre de la recherche** : Mise à l'essai d'une famille de situations de communication en algèbre destinée à des élèves de 2e secondaire

**Chercheur** : Philippe Labrosse, étudiant au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

**Directrice de recherche** : Sophie René de Cotret, professeure agrégée, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

## A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

### 7. Objectifs de la recherche.

Ce projet vise à étudier deux éléments. Il s'intéresse :

- d'une part, aux activités de communication mathématique réalisées en classe et qui favorisent l'apprentissage des élèves en les amenant dans une activité mathématique de qualité et;

- d'autre part, au fait que l'enseignant, en proposant à ses élèves des situations de communication qui les incitent à expliciter leur travail, obtient des éléments qui lui permettent d'ajuster son enseignement en fonction du degré de compréhension qu'il peut percevoir dans le travail des élèves.

Le chercheur s'intéresse donc aux réponses données par les élèves aux diverses situations proposées de même qu'aux interactions entre l'enseignant et ses élèves.

### 8. Participation à la recherche

La participation à cette recherche consiste pour les élèves et les enseignants à résoudre 6 activités de communication en algèbre. La période de réalisation en classe de même que la période de retour avec l'enseignant sont filmées. Tous les élèves auront aussi, après chaque activité, à répondre à de courtes questions sur leur appréciation de l'activité.

Trois élèves par classe pourraient être demandés pour faire une courte entrevue (au plus 30 minutes) après la réalisation des activités.

Plus spécifiquement, pour l'enseignant, la participation se résume à :

- Rencontrer préalablement à la recherche le chercheur afin de prendre connaissance des activités proposées et décider de leur enchaînement dans la planification annuelle de l'enseignant;

- Effectuer, préalablement à l'expérimentation en classe avec les élèves, chacune des activités pour soi-même;

- Diriger chacune des 6 situations en classe avec les élèves et accepter d'être filmé tant pendant la réalisation des activités en classe que lors du retour dans une période subséquente;

- Tenir un journal de bord sur la réalisation de chacune des situations et répondre aux questions posées dans ce journal;

- Après chaque situations, étudier les productions des élèves;

- Participer à au plus sept entrevues non-filmées après les activités visant à obtenir à chaud les impressions sur le déroulement des séances en classe (à cet effet, le chercheur consignera les réponses obtenues dans un cahier de notes et aucun enregistrement n'aura lieu).

**9. Confidentialité**

Les réponses aux situations que les élèves donneront demeureront confidentielles. Il en est de même avec les réponses aux questions données par les enseignants. Les productions écrites des élèves seront photocopiées. Les séances vidéos seront transcrites et les enregistrements effacés. Seul le chercheur et sa directrice visionneront les vidéos.

Chaque participant-élève à la recherche se verra attribuer un numéro et seul le chercheur principal et/ou la personne mandatée à cet effet auront la liste des participants et des numéros qui leur auront été attribués. De plus, les renseignements seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé.

Aucune information permettant d'identifier les élèves ou les enseignants participant à la recherche d'une façon ou d'une autre ne sera publiée. Ces renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas d'identifier les élèves seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation.

**10. Avantages et inconvénients**

En participant à cette recherche, vous ne courez pas de risque ou d'inconvénient particulier et vous contribuerez à l'avancement des connaissances et à l'amélioration des services offerts aux élèves et aux enseignants de mathématiques.

**11. Droit de retrait**

La participation est entièrement volontaire. Vous êtes libre de vous retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier votre décision. Si vous décidez de vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec le chercheur, au numéro de téléphone indiqué ci-dessous. Si vous vous retirez de la recherche, les renseignements (vidéo) qui auront été recueillis sur vous ou vos élèves (copies des élèves photocopiées) au moment du retrait seront détruits.

**12. Compensation**

Les participants ne recevront aucune compensation financière pour leur participation à la recherche.

**7. Diffusion des résultats**

Une copie de la thèse ainsi que les articles scientifiques qui s'y rattachent seront transmis aux enseignants, pour la thèse, au cours de l'année scolaire 2014-2015, lorsque les analyses auront été effectuées et, pour les articles, tant et aussi longtemps que ces derniers seront produits par le chercheur en lien avec la présente expérimentation.

Pour recevoir électroniquement la thèse et les articles scientifiques, vous pouvez inscrire vos coordonnées dans la partie « consentement » ci-après. Ces coordonnées resteront strictement confidentielles et ne serviront qu'aux fins de transmission des résultats.

**B) CONSENTEMENT**

| | Oui | Non |
|---|---|---|
| *Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur ma participation à cette recherche et comprend le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.* | ☐ | ☐ |
| *Après réflexion et un délai raisonnable, je consens à participer à cette étude et j'accepte d'être filmé tant pendant la réalisation des activités en classe que lors du retour dans une période subséquente. Je sais que je peux me retirer en tout temps, sur simple avis verbal, sans aucun préjudice et sans avoir à justifier ma décision* | ☐ | ☐ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Signature de l'enseignant: | | Date : | |
| Nom : | | Prénom : | |
| Adresse électronique : | | | |

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Signature du chercheur (ou de son représentant): | | Date : | |
| Nom : | *Labrosse* | Prénom : | *Philippe* |

Pour toute question relative à l'étude, ou pour vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec Philippe Labrosse, doctorant et chercheur, au numéro de téléphone suivant : (514) 765-7666 poste 4142 ou à l'adresse courriel philippe.labrosse@csmb.qc.ca.

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

**Un exemplaire du formulaire d'information et de consentement signé doit être remis au participant.**